

**B.A. / B.Sc. Second Semester**  
**(Assignment)**  
**MATHEMATICS**  
**First PAPER**  
**Integral Calculus**

**UNIT-I**

Q.1 a) Find the asymptotes of the following curve

निम्नलिखित वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिये।

$$(x^2 - y^2)^2 - 4y^2 + y = 0$$

b) Determine the existence and nature of the double point on the curve

$$(x - 2)^2 = y(y - 1)^2.$$

वक्र  $(x - 2)^2 = y(y - 1)^2$  पर द्विक बिन्दुओं की विद्यमानता एवं उनकी प्रकृति का निर्धारण कीजिए।

Q.2 (a) Find the asymptotes of the curve  $r \sin \theta = a$

वक्र  $r \sin \theta = a$  की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

(b) Trace the curve  $x^3 + y^3 = a^2x$ .

वक्र  $x^3 + y^3 = a^2x$  का अनुरेखण कीजिये।

**UNIT-II**

Q.3 a) Prove that सिद्ध कीजिए कि

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

b) Evaluate मान ज्ञात कीजिये

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}$$

Q.4 (a) Prove that सिद्ध कीजिए कि

$$\int_b^a (x-a)^{m-1} (b-x)^{n-1} dx = (b-a)^{m+n-1} \beta(m, n)$$

(b) Evaluate मान ज्ञात कीजिये

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r \sin \theta d\theta dr$$

**UNIT-III**

Q.5 a) Evaluate the following integral by changing to polar co-ordinates.

निम्नलिखित समाकल का ध्रुवीय निर्देशांकों में बदलकर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x dy dx}{x^2 + y^2}$$

b) Evaluate मान ज्ञात कीजिये

$$\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{yz-x^2}} dz dx dy$$

Q.6 (a) Evaluate the following integral by changing the order of integration.

निम्नलिखित समाकल में समाकलन का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dx dy$$

(b) Evaluate  $\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$

where  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  and  $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$

मान ज्ञात कीजिए  $\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$

जहां  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  तथा  $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$

#### UNIT-IV

Q.7 (a) Prove that the area of loop of the curve  $x = a(1 - t^2), y = at(1 - t^2); -1 \leq t \leq 1$  is  $8a^2/15$ .

सिद्ध कीजिए कि वक्र  $x = a(1 - t^2), y = at(1 - t^2); -1 \leq t \leq 1$  के लूप का क्षेत्रफल  $8a^2/15$  होता है

b) Find the volume of the solid generated by the revolution of tractrix

$x = a \cos t + \frac{a}{2} \log \tan^2 \frac{t}{2}, y = a \sin t$  about its asymptote.

ट्रेक्ट्रिक्स  $x = a \cos t + \frac{a}{2} \log \tan^2 \frac{t}{2}, y = a \sin t$  का अपने अनन्तस्पर्शी के सापेक्ष परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Q.8(a) Find the length of the arc of the curve  $y = \log \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$  from  $x = 1$  to  $x = 2$ .

वक्र  $y = \log \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$  की  $x = 1$  से  $x = 2$  तक की चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

b) Evaluate the surface area of the solid generated by revolving the cycloid

$x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$  about the  $x$ -axis.

चक्रज  $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$  को  $x$ -अक्ष के सापेक्ष घुमाने से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

## B.A./B.Sc.(Pass/Subsidiary/Hons.) Second Semester

### Assignment

(Faculty of Science)

MATHEMATICS

PAPER-II

Abstract Algebra

#### UNIT-I

1. If  $a$  and  $b$  are any two elements of a group  $(G, *)$  then show that the equation  $a * x = b$  and  $y * a = b$  have unique solution in  $G$ .

यदि  $a$  और  $b$  किसी समूह  $(G, *)$  के कोई दो अवयव हैं तो दर्शाइए कि समीकरण  $a * x = b$  और  $y * a = b$  के अद्वितीय हल हैं।

2.(a) Find  $\sigma^{-1}\rho\sigma$ , when

$\sigma^{-1}\rho\sigma$  ज्ञात कीजिए

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

And  $\sigma = (1\ 3\ 4)(5\ 6)(2\ 7\ 8\ 9)$

Also express the permutations  $\rho$  as a product of disjoint cycles. Find whether  $\rho$  is even or odd permutation and give its order.

तथा क्रमचय को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में भी व्यक्त करें। ज्ञात कीजिए कि  $\rho$  सम है या विषम क्रमचय और कोटि भी बताइये

(b) If  $H$  and  $K$  are any two subgroups of a group  $G$  then prove that  $HK$  is a subgroup of  $G$  iff  $HK=KH$ .

यदि  $H$  और  $K$  समूह  $G$  के कोई दो उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि  $HK$ ,  $G$  का एक उपसमूह है यदि और केवल यदि  $HK=KH$ .

#### UNIT-II

3.(a) State and prove Lagrange's theorem.

लैग्रेंज के प्रमेय का कथन दीजिये तथा सिद्ध कीजिये

(b) Prove that any two right (left) cosets of a subgroup of a group are either identical or disjoint.

सिद्ध करें कि एक समूह के उपसमूह के कोई भी दो दाएं (बाएं) सह समुच्चय या तो समान या असंबद्ध हैं।

4. (a) If  $H$  and  $K$  are two normal subgroups of  $G$  then prove that  $HK$  is also a normal subgroup of  $G$ .

यदि H और K, G के दो सामान्य उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि HK भी G का एक सामान्य उपसमूह है।

- (b) Find the quotient group  $G/H$  when  $G = \langle Z_8, +_8 \rangle$ ,  $H = \langle \{0, 4\}, +_8 \rangle$   
भागफल समूह  $G/H$  ज्ञात कीजिए जब  $G = \langle Z_8, +_8 \rangle$ ,  $H = \langle \{0, 4\}, +_8 \rangle$

### UNIT-III

- 5(a) Prove that a homomorphism  $f$  of a group  $G$  into a group  $G'$  is a monomorphism iff kernel of  $f = \{e\}$ , where  $e$  is the identity in  $G$ .

सिद्ध कीजिए कि समूह  $G$  का समूह  $G'$  में समाकारिता  $f$  एक एकैक समकारिता है यदि और केवल यदि  $\text{ker } f = \{e\}$ , जहाँ  $e$   $G$  में तत्समक है

- (b) Show that the set  $J$  of Gaussian Integers  $J = \{m + in | m, n \in \mathbb{Z}\}$  form a ring with respect to ordinary addition and multiplication of complex numbers.

दर्शा कि गाऊसी पूर्णाकों का समुच्चय  $J = \{m + in | m, n \in \mathbb{Z}\}$  सम्मिश्र संख्याओं का साधारण जोड़ और गुणा के संबंध में एक वलय बनाते हैं।

6. Prove that every field is an integral domain but the converse is not necessarily true.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णाकिय प्रान्त है लेकिन विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं है।

### UNIT-IV

7. (a) Prove that the necessary and sufficient conditions for a non – empty subset  $K$  of a field  $F$  to be a subfield are

सिद्ध कीजिए कि एक क्षेत्र  $F$  के एक अरिक्त उपसमुच्चय  $K$  के उपक्षेत्र होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्तें हैं

- (i)  $a \in K, b \in K \Rightarrow a - b \in K$   
(ii)  $a \in K, 0 \neq b \in K \Rightarrow ab^{-1} \in K$

- (b) Prove that the intersection of two subrings is also a subring.

सिद्ध कीजिए कि दो उपवलय का प्रतिच्छेदन भी एक उपवलय होता है।

8. Prove that  $S = \{a + 2^{1/3}b + 4^{1/3}c | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$  is a subfield of  $\mathbb{R}$ .

सिद्ध कीजिए कि  $S = \{a + 2^{1/3}b + 4^{1/3}c | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ ,  $\mathbb{R}$  का एक उपक्षेत्र है।

\*\*\*\*\*

**B.Sc. (Hons.) Second Semester Examination**  
**(Faculty of Science)**  
**MATHEMATICS**  
**Third PAPER**  
**Graph Theory**  
**Assignment**

**Unit I**

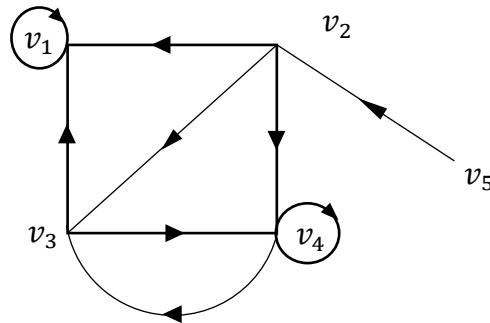
- 1 (a) Prove that the sum of degrees of all the vertices in a graph is equal to twice the number of edges in the graph.

सिद्ध कीजिए कि किसी ग्राफ में उसके सभी शीर्षों की कोटियों का योगफल ग्राफ में उपस्थित कोरों की संख्या का दो गुना होता है।

- 1 (b) Determine the out-degree and in-degree of each of the vertex in the following digraph. Also verify that

निम्न दिष्ट ग्राफ में प्रत्येक शीर्ष की बाह्य कोटि तथा अन्तः कोटि ज्ञात कीजिए। यह भी सत्यापित कीजिए कि

$$\sum deg^+(v) = \sum deg^-(v) = |E|$$

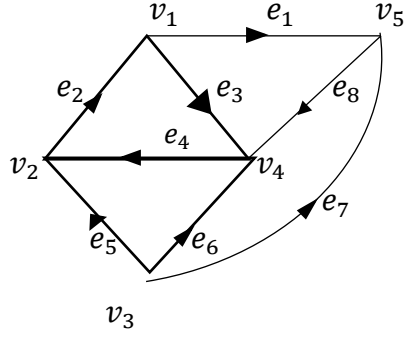


- 2 (a) The edges of  $K_6$  are to be painted red or blue. Show that for any arbitrary way of painting there is a red  $K_3$  or a blue  $K_3$ .

ग्राफ  $K_6$  की कोरों को लाल अथवा नीले रंग से रंगा जाना है। प्रदर्शित कीजिए कि रंगने के सभी स्वेच्छ तरीके एक लाल  $K_3$  अथवा एक नीला  $K_3$  ग्राफ प्राप्त होता है।

- 2 (b) Find the adjacency matrix and the incidence matrix of the following directed graph.

निम्न दिष्ट ग्राफ का आसन्नता आव्यूह तथा आपतन आव्यूह ज्ञात कीजिए।



## UNIT-II

3 (a) Define with an example.  
उदाहरण सहित परिभाषित करो

(i) Product of two graphs  
दो ग्राफो का गुणनफल

(ii) Isomorphism of Graphs  
ग्राफो की तुल्यकारिता

3 (b) A connected graph G has an Euler trail if and only if it has at most two vertices of odd degree.

सम्बद्ध ग्राफ G में एक आयलर ट्रेल होती है यदि और केवल यदि G में अधिक से अधिक दो शीर्ष विषम कोटि के हैं।

4 (a) Define with an example

उदाहरण सहित परिभाषित करो

(i) Trail

ट्रेल

(ii) Path

पथ

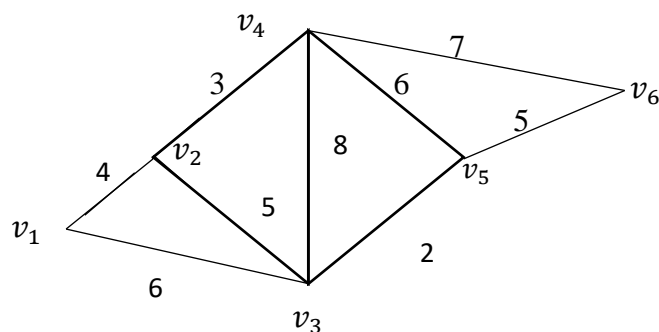
4 (b) Prove that in a complete Graph with n vertices, there are  $\frac{n-1}{2}$  edge disjoint Hamiltonian cycles if n is an odd number  $\geq 3$

सिद्ध कीजिए कि n शीर्षों वाले पूर्ण ग्राफ में (n एक विषम पूर्णांक  $\geq 3$ )  $\frac{n-1}{2}$  कोर - असंयुक्त हैमिलटोनियन चक्र होते हैं

### UNIT-III

5. (a) Find the shortest path from the vertex  $v_1$  to vertex  $v_6$  in the following weighted graph.

निम्न भारित ग्राफ में शीर्षों  $v_1$  से  $v_6$  तक लघुतम मार्ग दूरी ज्ञात कीजिए:



5 (b) If  $G$  is a connected planar graph with  $n$  vertices,  $e$  edges and  $r$  regions, then

यदि  $G$  एक सम्बद्ध समतलीय ग्राफ है जिसमें  $n$  शीर्ष ,  $e$  कोरें तथा  $r$  क्षेत्र हैं, तब

$$n - e + r = 2$$

6 (a) If  $G$  is simple connected planar graph with  $n$  vertices and  $e$  edges, then

यदि  $G$  एक सरल सम्बद्ध समतलीय ग्राफ है जिसमें  $n$  शीर्ष तथा  $e$  कोरें हैं, तब

$$e \leq 3n - 6 \quad (e > 2)$$

6 (b) Prove that Complete Bipartite Graph  $K_{3,3}$  is non planar.

सिद्ध कीजिए कि पूर्ण द्विखंडी ग्राफ  $K_{3,3}$  समतलीय ग्राफ नहीं है।

### UNIT-IV

7. (a) If  $h$  is the height of a balanced complete binary tree on  $n$  vertices, then

यदि  $h$  शीर्षों के संतुलित पूर्ण द्विचर वृक्ष की ऊँचाई है , तब

$$h = \log_2 \left( \frac{n+1}{2} \right)$$

7 (b) If  $G$  is an acyclic graph with  $n$  vertices and  $k$  connected components, then  $G$  has  $n - k$  edges.

यदि  $G$  एक अचक्रीय ग्राफ है , जिसमें  $n$  शीर्ष तथा  $k$  सम्बद्ध घटक है , तब  $G$  में  $n - k$  कोरे होती है।

8 (a) There is one and only one path between every pair of distinct vertices in a tree  $T$ .

वृक्ष  $T$  में किन्हीं भी दो शीर्षों के मध्य एक और केवल एक पथ होता है।

8 (b) If  $T$  is binary tree with  $n$  vertices and of height  $h$ , then.

यदि द्विचर वृक्ष  $T$  में  $n$  शीर्ष तथा वृक्ष की ऊँचाई  $h$  है , तब

$$h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1$$

\*\*\*\*\*



**B.A./B.Sc./B.Sc. (Hons.) Fourth Semester Examination  
(Assignment)  
MATHEMATICS  
First PAPER  
Complex Analysis**

**Unit-I**

1. (a) Obtain the equation of a circle through three given points.  
तीन बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।  
(b) Prove that the area of the triangle whose vertices are the points  $z_1, z_2, z_3$  on the Argand diagram is  
सिद्ध कीजिये कि आर्गेण्ड चित्र में बिन्दुओं  $z_1, z_2, z_3$  शीर्ष वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2} \sum \{(z_2 - z_3) \bar{z}_1\} / (4iz_1)$$

2. (a) Prove that सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$$

- (b) Prove that the function  $f(z) = |z|^2$  is continuous every where but its derivative exists only at the origin.

सिद्ध कीजिए कि फलन  $f(z) = |z|^2$  सर्वत्र संतत है किन्तु इसके अवकलन का अस्तित्व केवल मूल बिन्दु पर ही है।

**Unit-II**

3. (a) Define Singular Point. Prove the necessary condition that a function  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  be analytic in a domain D is that in D, u and v satisfy the Cauchy – Riemann equation i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

विचित्र बिन्दु परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि फलन  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  के किसी प्रान्त D में विश्लेषिक होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध है कि उस प्रान्त में u तथा v कोशी – रीमान समीकरण संतुष्ट करते हैं अर्थात्

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- (b) Show that the function  $f(z) = \sqrt{(|xy|)}$  satisfies the Cauchy – Riemann equation at the origin but is not analytic at the point.

प्रदर्शित कीजिए की फलन  $f(z) = \sqrt{(|xy|)}$  मूल बिन्दु पर कोशी – रीमान समीकरणों को सन्तुष्ट करता है परन्तु इस बिन्दु पर विश्लेषिक फलन नहीं है।

4. (a) Define Harmonic Function. Show that function  $u = \cos x \cos hy$  is harmonic and find its harmonic conjugate.

प्रसंवादी फलन परिभाषित कीजिए सिद्ध कीजिए कि फलन  $u = \cos x \cos hy$  प्रसंवादी फलन है तथा इसका प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

- (b) Prove that  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$  satisfy Laplace equation. Also determine the corresponding analytic function  $f(z) = u + iv$ .

सिद्ध कीजिए कि  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$  लेप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करता है, निम्न का विश्लेषण फलन  $f(z) = u + iv$  भी ज्ञात कीजिए।

**Unit-III**

5. Show that both the transformations  $\omega = \frac{z+i}{z-i}$  and  $\omega = \frac{i+z}{i-z}$  transform  $|W| \leq 1$  into the lower half plane  $I(Z) \leq 0$

प्रदर्शित करिए कि दोनों रूपान्तरण  $\omega = \frac{z+i}{z-i}$  और  $\omega = \frac{i+z}{i-z}$   $|W| \leq 1$  को निम्न अर्धतल  $I(Z) \leq 0$  में रूपान्तरित

करता है।

6. Discuss the transformation  $w = z^2$ . Find the images of the hyperbolas  $x^2 - y^2 = c$  and  $xy = d$  under this transformation.

रूपान्तरण  $w = z^2$  की विवेचना कीजिये। अतिपरवलयों  $x^2 - y^2 = c$  तथा  $xy = d$  का इस रूपान्तरण में प्रतिचित्रण ज्ञात कीजिये।

#### Unit-IV

7. (a) Evaluate  $\int_0^{1+i} z^2 dz$

मान ज्ञात कीजिये  $\int_0^{1+i} z^2 dz$

(b) If  $f(z)$  is analytic in a simply connected domain  $G$ , then the indefinite integral  $\int_{z_0}^z f(z) dz$  is independent of the path joining  $z_0$  with  $z$  in  $G$ .

सिद्ध कीजिए कि यदि एकशः सम्बद्ध प्रदेश  $G$  में  $f(z)$  विश्लेषिक फलन हो, तो अनिश्चित समाकल  $\int_{z_0}^z f(z) dz$ ,  $G$  में

बिन्दुओं  $z_0$  तथा  $z$  को मिलाने वाले पथ से स्वतंत्र होता है।

8. State and prove Morera Theorem.

मोरेरा प्रमेय का कथन लिखिए एवं इसे सिद्ध कीजिए।

## B.Sc. Mathematics Fourth Semester

### MATHEMATICS

### Second PAPER

### Real Analysis-II

#### Unit-I

Q.1. (a) State and Prove Darboux Theorem.

(b) If  $f(x) = x^2, \forall x \in [0,1]$  then prove that function  $f$  is R-integrable

Q.2 (a) State and Prove Necessary and Sufficient condition for the function to be R-integrable.

(b) If  $f(x) = x, \forall x \in [0,1]$  then prove that function  $f$  is R-integrable

#### Unit-II

Q.3. (a) Evaluate  $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$  by parts.

(b) Prove that every monotonic function defined on closed interval is always R-integrable.

Q.4. (a) State and Prove fundamental theorem of Integral.

(b) Prove that every continuous function defined on closed interval is always R-integrable.

#### Unit III

5. (a) Let  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  is a series of continuous functions  $u_n(x), \forall n \in N$  in  $[a, b]$  and converges uniformly to a sum function  $f$  on  $[a, b]$  then prove that  $f$  is also continuous on  $[a, b]$ .

माना  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  अन्तराल  $[a, b]$  पर परिभाषित संतत फलनो  $u_n(x), \forall n \in N$  की श्रेणी है तथा  $[a, b]$  पर योग फलन  $f$  को एकसमानतः अभिसृत होती है तब सिद्ध कीजिए कि  $f$  भी  $[a, b]$  पर संतत है।

(b) Show that the sequence  $\{f_n\}$ , where  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \forall x \in [a, b]$  is not uniformly convergent on any interval  $[a, b]$  containing 0.

प्रदर्शित कीजिए कि अनुक्रम  $\{f_n\}$  जहां  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \forall x \in [a, b]$  0 को समाहित करने वाले किसी भी अन्तराल  $[a, b]$  पर एकसमान अभिसारित नहीं होता है।

6. (a) Test for uniform convergence of the series.

निम्न श्रेणी के एकसमान अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

$$\sum \frac{x}{(n+x^2)^2}$$

(b) Show that  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p+n^q x^2}, \forall x \in R$  is uniformly convergent if  $p + q > 2$ .

प्रदर्शित कीजिए कि  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p+n^q x^2}, \forall x \in R$  एकसमानतः अभिसारी है यदि  $p + q > 2$

#### Unit-IV

7. Test for uniform convergence and term by term integration of the following series:

निम्न श्रेणी के एकसमान अभिसरण तथा पदशः समाकलन की जांच कीजिए:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+x^2)^2}$$

8. Test for the uniform convergence of the series  $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}$  and continuity of the sum function at  $x = 0$ .

श्रेणी  $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}$  के एकसमान अभिसरण के लिए जांच कीजिए तथा योग फलन की  $x = 0$  पर सांतत्यता की जांच कीजिए।

**B.Sc. (Hons.) Fourth Semester  
(Assignment)  
MATHEMATICS**

**THIRD PAPER**

**Differential Equations-II**

**UNIT-I**

Q.1. Solve (हल कीजिए):-  $\frac{d^2y}{dx^2} + (1 - \cot x) \frac{dy}{dx} - y \cot x = \sin^2 x$

Q.2. Solve by the method of variation of parameters

प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिये

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \operatorname{cosec} ax$$

**UNIT-II**

Q.3. Solve the differential equation

अवकल समीकरण हल कीजिये।

(a)  $y(1 - \log y) \frac{d^2y}{dx^2} + (1 + \log y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

(b)  $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Q.4 Find the complete integral of the following equation by Charpit's method

निम्नलिखित समीकरण से चार्पी विधि से पूर्ण समाकलन ज्ञात कीजिये।

$$2(z + xp + yq) = yp^2$$

**UNIT-III**

Q.5. Solve the partial differential equation

आंशिक अवकल समीकरण हल कीजिये।

(a)  $r - 2s + t = \sin(2x + 3y)$

(b)  $r - 4s + 4t + p - 2q = e^{x+y}$

Q.6. Solve: (हल कीजिए) :

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$$

**UNIT-IV**

Q.7. Solve by Monge's method

मोंग्स विधि द्वारा हल कीजिये :

$$r = a^2 t$$

Q.8. Solve by the method of separation of variable

चरों के पृथक्करण विधि द्वारा हल कीजिये

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial z}{\partial t}$$

**B.Sc. (Hons.) Sixth Semester  
(Assignment)  
MATHEMATICS**

**FIRST PAPER**

**Abstract Algebra-II**

**UNIT-I**

Q.1. (a) Prove that, every homomorphic image of a ring  $R$  is isomorphic to some quotient ring (residue class ring) thereof.

सिद्ध कीजिए कि किसी वलय  $R$  की प्रत्येक समाकारिक प्रतिबिम्ब उसकी किसी विभाग वलय के तुल्यकारी होती है।

(b) Prove that a commutative ring with unity is a field if it has no proper ideals or if it is simple.

सिद्ध कीजिए कि, एक क्रमविनिमेय तत्सम की वलय एक क्षेत्र होता है यदि इसकी कोई उचित गुणजावली न हो या यह एक सरल वलय हो।

Q.2. (a) Prove that an ideal  $I$  of a commutative ring  $R$  with unity is maximal iff the quotient ring  $R/I$  is a field.

सिद्ध कीजिए कि तत्सम की क्रमविनिमेय वलय  $R$  की कोई गुणजावली  $I$  एक उच्चिष्ठ गुणजावली है यदि और केवल यदि विभाग वलय  $R/I$  एक क्षेत्र है।

(b) Prove that, the ring  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  of integers is a principal ideal domain.

सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों की वलय  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  एक मुख्य गुणजावली प्रान्त है।

**UNIT-II**

Q.3. (a) Prove that, every integral domain can be embedded into a field.

सिद्ध कीजिए कि किसी पूर्णाकीय प्रान्त को एक क्षेत्र में अन्तः स्थापित किया जा सकता है।

(b) Prove that, the field  $\langle \mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p \rangle$  is a prime field for each prime number  $p$ .

सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र  $\langle \mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p \rangle$  प्रत्येक अभाज्य संख्या  $p$  के लिए, एक अभाज्य क्षेत्र है।

Q.4. (a) Prove that, the set  $F^n$  of all ordered  $n$  – tuples of a field  $F$  is a vector space over the field

$F$  for the vector addition and scalar multiplication defined as

सिद्ध कीजिए कि किसी क्षेत्र  $F$  के अवयवों के  $n$  क्रमित तुपलों का समुच्चय  $F^n$ , क्षेत्र  $F$  पर निम्न परिभाषित सदिश योग व अदिश गुणन के लिए एक सदिश समष्टि है।

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$\alpha (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$$

where (जहाँ)  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in F^n$   $\alpha \in F$

(b) Prove that, the set  $S$  of all solutions satisfying the simultaneous equations

$ax + by + cz = 0$  and  $dx + ey + fz = 0$ , where  $a, b, c, d, e, f \in R$  is a subspace of vector space  $V = R^3$  over the field  $R$ .

सिद्ध कीजिए कि युगपत समीकरणों  $ax + by + cz = 0$  तथा  $dx + ey + fz = 0$  के समस्त हलों का समुच्चय  $S$ , जहाँ  $a, b, c, d, e, f \in R$  पर सदिश समष्टि  $V = R^3$  का क्षेत्र  $R$  पर उपसमष्टि है।

**UNIT-III**

Q.5. (a) Prove that the vectors  $v_1 = (1 + i, 2i), v_2 = (1, 1 + i)$  are linearly dependent in the vector space  $V_2(C)$  but are linearly independent in the vector space  $V_2(R)$ .

सिद्ध कीजिए कि सदिश  $v_1 = (1 + i, 2i), v_2 = (1, 1 + i)$  सदिश समिष्ट  $V_2(C)$  में एकघाततः परतन्त्र है परन्तु सदिश समिष्ट  $V_2(R)$  में एकघाततः स्वतंत्र है।

(b) Prove that, the set of non – zero vectors  $\{v_1, v_2 \dots \dots v_n\}$  of a vector space  $V(F)$  is linearly dependent iff some  $v_k, 2 \leq k \leq n$  is a linear combination of the preceding vectors.

किसी सदिश समिष्ट  $V(F)$  के अशून्य सदिशों का समुच्चय  $\{v_1, v_2 \dots \dots v_n\}$  एकघाततः आश्रित (परतंत्र) होगा यदि और केवल यदि कोई एक  $v_k, 2 \leq k \leq n$  अपने पूर्ववर्ती सदिशों का एकघात संचय हो।

Q.6. (a) If S and T are finite dimensional subspaces of a vector space, then prove that

$$\dim S + \dim T = \dim(S + T) + \dim(S \cap T).$$

यदि S एवं T किसी सदिश समिष्ट की परिमित विमिय उपसमिष्टियाँ हो, तो सिद्ध कीजिए विमा S + विमा T = विमा (S + T) + विमा (S ∩ T)

(b) Prove that a vector space  $V(F)$  is a direct sum of its two subspaces  $U(F)$  and  $W(F)$  iff

$$V = U + W \quad \text{(ii) } U \cap W = \{0\}$$

सिद्ध कीजिए कि एक सदिश समिष्ट  $V(F)$  अपनी दो उपसमिष्टियों  $U(F)$  और  $W(F)$  का अनुलोम योगफल होगी यदि और केवल यदि

$$(i) v = U + W \quad \text{(ii) } U \cap W = \{0\}$$

#### UNIT-IV

Q.7. (a) If  $W(F)$  is any subspace of a vector space  $V(F)$ , then prove that the set  $\frac{V}{W}$  of all co sets

$W + v, v \in V$  is a vector space over the field F for the vector addition and scalar multiplication defined as

यदि  $W(F)$  सदिश समिष्ट  $V(F)$  की उपसमिष्ट है तो सिद्ध कीजिए कि  $W$  के  $V$  में सहसमुच्चयों  $\frac{V}{W} = \{W + v, v \in V\}$

क्षेत्र  $(F, +, \cdot)$  पर निम्न सदिश योग तथा अदिश गुणन संक्रिया के लिए सदिश समिष्ट होता है

$$(W + v_1) + (W + v_2) = W + (v_1 + v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \quad \text{and (और) } \alpha \cdot (W + v) = W + \alpha \cdot v, \alpha \in k, v \in V$$

(b) Show that the mapping  $t: V_2(R) \rightarrow V_2(R)$  defined by  $t(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$  is an isomorphism.

सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण  $t: V_2(R) \rightarrow V_2(R)$  जहाँ  $t(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$  समिष्ट  $V_2(R)$  पर एक तुल्यकारिता है।

Q.8. (a) Prove that, the kernel of a linear transformation  $t: V \rightarrow V'$  is a subspace of the vector space  $V$ .

सिद्ध कीजिए कि रैखिक प्रतिचित्रण  $t: V \rightarrow V'$  की अष्टि, सदिश समिष्ट  $V$  की उपसमिष्ट होती है।

(a) Prove that  $t: R^3 \rightarrow R^3$ , defined as  $t(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$  is a linear transformation. Also find the rank and nullity of  $t$ .

सिद्ध कीजिए कि  $t: R^3 \rightarrow R^3, t(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$  एक रैखिक रूपान्तरण है तथा  $t$  की कोटि एवं शून्यता ज्ञात कीजिए।

**B.Sc. (Hons.) Sixth Semester  
(Assignment)  
MATHEMATICS  
SECOND PAPER  
Complex Analysis-II**

**UNIT-I**

Q.1. (a) Prove that a power series represents an analytic function inside its circle of convergence.  
सिद्ध कीजिये कि एक घात श्रेणी अपने अभिसरण वृत्त के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर विश्लेषिक फलन निरूपित करता है।

(b) Prove that the sequences  $\left\{\frac{1}{1+nz}\right\}$  is uniformly convergent to zero in the region  $|z| \geq 2$ .

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम  $\left\{\frac{1}{1+nz}\right\}$  क्षेत्र  $|z| \geq 2$  में शून्य को एक समान अभिसृत होती है।

Q.2. (a) Find the region of convergence of the series  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^{34n}}$ .

श्रेणी  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^{34n}}$  का अभिसरण क्षेत्र प्राप्त कीजिये।

b) Show that the function  $f(z) = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \dots$  can be continued analytically outside the circle of convergence. Also construct a power series which is analytic continuation of given series.

सिद्ध कीजिये कि फलन  $f(z) = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \dots$  का विश्लेषिक सांतत्य अभिसरण वृत्त के बाहर किया जा सकता है। एक घात श्रेणी की रचना भी कीजिये जो कि दी हुई श्रेणी का विश्लेषिक सांतत्य है।

**UNIT-II**

Q.3. State and prove Taylor's Theorem for complex functions.

कथन सहित सम्मिश्र फलनों के लिए टेलर प्रमेय को सिद्ध कीजिये।

Q.4. Prove that (सिद्ध कीजिये)

$$\sin \left\{ c \left( z + \frac{1}{z} \right) \right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n + z^{-n})$$

where (जहाँ)

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(2c \cos \theta) \cos n\theta \, d\theta.$$

**UNIT-III**

Q.5. Evaluate the integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz$  around the circle  $c: |z| = 3$ .

परिरेखा वृत्त  $c: |z| = 3$  पर समाकल  $\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz$  का मान ज्ञात कीजिये।

Q.6. State and prove Rouché's Theorem.

कथन सहित रूशे प्रमेय को सिद्ध कीजिये।

**UNIT-IV**

Q.7. Discuss the transformation  $w = z^2$ . Find the images of the hyperbolas  $x^2 - y^2 = c$  and  $xy = d$  under this transformation.

रूपान्तरण  $w = z^2$  की विवेचना कीजिये। अतिपरवलयों  $x^2 - y^2 = c$  तथा  $xy = d$  का इस रूपान्तरण में प्रतिचित्रण ज्ञात कीजिये।

Q.8. By integrating  $\frac{e^{iz^2}}{z}$  round a suitable contour, prove that  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx = \frac{\pi}{4}$  also deduce that

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

फलन  $\frac{e^{iz^2}}{z}$  को उपयुक्त परिरेखा पर समाकलन करते हुए सिद्ध कीजिये कि  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx = \frac{\pi}{4}$  तथा निगमन भी

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

**B.Sc. (Hons.) Sixth Semester**  
**(Assignment)**  
**MATHEMATICS**  
**THIRD PAPER**  
**Mechanics**  
**UNIT-I**

Q.1. (a) The inclinations of the tangents at the extremities of a portion of a common catenary be  $\alpha$  and  $\beta$  and  $l$  be length of the portion. If the two extremities are on one side of the catenary, show that, the height of one above the other is:

$$l \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

एक साधारण कैटनरी के  $l$  लम्बाई के एक भाग के सिरो पर स्पर्श रेखाओं के क्षैतिज से झुकाव  $\alpha$  तथा  $\beta$  है। यदि दोनों सिरे कैटनरी के शीर्ष के एक ही ओर हो, तो सिद्ध कीजिए कि एक सिरे की दूसरे सिरे से ऊँचाई है:

$$l \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

(b) A uniform measuring chain of length  $l$  is tightly stretched over a river, the middle point just touching the surface of the water, while each of the extremities has an elevation  $k$  above the surface. Show that the difference between the length of the measuring chain and the breadth of the river is nearly  $\frac{8k^2}{3l}$ .

$l$  लम्बाई की एक समान जंजीर एक नदी के किनारों पर  $k$  ऊँचाई के खम्भों पर खींच कर इस प्रकार बांधा हुआ है कि इसके मध्य भाग का निचला बिन्दु नदी के जल स्तर को ठीक स्पर्श करता है। प्रदर्शित कीजिए कि जंजीर की लम्बाई तथा नदी की चौड़ाई का अंतर लगभग  $\frac{8k^2}{3l}$  है।

Q.2. (a) Five weightless rods of equal lengths are jointed together so as to form a rhombus ABCD with one diagonal BD. If a weight  $W$  be attached to C and the system is suspended from A, show that there is a thrust in BD equal to  $W/\sqrt{3}$ .

समान लम्बाई के पाँच भारहीन छड़ परस्पर जोड़े गए हैं ताकि एक विकर्ण  $BD$  सहित समचतुर्भुज  $ABCD$  बने। यदि  $C$  पर एक भार  $W$  बाँध दिया जाए और निकार को  $A$  से लटकाया जाए, तो सिद्ध कीजिए कि  $BD$  में प्रणोद  $W/\sqrt{3}$  के तुल्य है।

(b) A uniform ladder of length  $l$  and weight  $W$ , rests with its foot on the rough ground, and its upper end against a smooth wall, inclination to the vertical being  $\alpha$ , A force  $P$  is applied horizontally to the ladder at a point distance  $C$  from the foot so as to make the foot approach the wall. Prove that  $P$  must exceed  $\frac{lW}{l-C} \left( \mu + \frac{1}{2} \tan \alpha \right)$ , where  $\mu$  is the force of friction between plane and ladder.

एक समांग सीढ़ी की लम्बाई  $l$  तथा भार  $W$  है। सीढ़ी का एक सिरा रूक्ष क्षैतिज समतल पर है और दूसरा एक चिकनी दीवार के सहारे स्थित है। सीढ़ी उर्ध्वाधर से  $\alpha$  कोण बनाती है। सीढ़ी की जड़ से  $C$  दूरी पर एक क्षैतिज बल  $P$  लगाकर सीढ़ी को दीवार की ओर खींचा जाता है। सिद्ध कीजिए कि  $P$  का मान  $\frac{lW}{l-C} \left( \mu + \frac{1}{2} \tan \alpha \right)$  से अधिक होना चाहिए, जहाँ समतल और सीढ़ी के बीच घर्षण गुणांक  $\mu$  है।

**UNIT-II**

Q.3. (a) A sphere of given weight  $W$ , rests between two smooth planes, one vertical and other inclined at



an Angle  $\alpha$  to the vertical. Find the reactions of the planes on the sphere.

$W$  भार का एक गोला दो चिकने समतलों के बीच में रखा हुआ है। एक समतल ऊर्ध्वाधर में है और दूसरा  $\alpha$  कोण बनाता है। गोले पर समतलों की प्रतिक्रियाएँ ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that a system of coplanar forces acting upon a rigid body will be in equilibrium, if the algebraic sum of the moments of forces about each of three non-collinear points in their plane is zero.

सिद्ध कीजिए कि किसी दृढ़ पिण्ड पर क्रियाशील एक समतलीय बल निकाय साम्यावस्था में होगा, यदि उनके समतल में स्थित तीन असमरेखीय बिन्दुओं के प्रत्येक के सापेक्ष बलों का आघूर्णों का बीजीय योग शून्य हो।

Q.4. (a) A particle is projected so as to have a range  $R$  on the horizontal plane through the point of projection. If  $\alpha$  and  $\beta$  are the possible angles of projection and  $t_1$  and  $t_2$  the corresponding times of flights show that

$$\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

एक कण इस प्रकार से फेंका जाता है कि प्रक्षेप बिन्दु से गुजरने वाले क्षैतिज समतल पर परास  $R$  है। यदि  $\alpha$  तथा

$\beta$  सम्भव प्रक्षेप कोण हो तथा  $t_1$  व  $t_2$  संगत उड़डयन काल हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

(b) Shots are fired simultaneously from the top and bottom of a vertical cliff with elevations  $\alpha$  and  $\beta$  respectively, strike an object simultaneously at the same point. Show that, if 'a' is horizontal distance of the object from the cliff, the height of the cliff is  $a(\tan \beta - \tan \alpha)$ .

एक ऊर्ध्वाधर मीनार की चोटी व पाद से दो गोलियाँ क्रमशः  $\alpha$  व  $\beta$  कोण पर एक साथ दागी जाती है कि वे एक साथ किसी वस्तु को एक ही बिन्दु पर टकराती हैं। यदि वस्तु की मीनार से क्षैतिज दूरी  $a$  हो, तो सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई  $a(\tan \beta - \tan \alpha)$  होगी।

### UNIT-III

Q.5. (a) A particle describes the following curves under a force  $P$  to the pole find the law force

$$(a/r) = e^{n\theta}, n\theta, \cos hn\theta \text{ or } \sin hn\theta$$

ध्रुव बिन्दु की ओर बल  $P$  के अधीन एक कण  $(a/r) = e^{n\theta}, n\theta, \cos hn\theta$  या  $\sin hn\theta$  निर्मित करता है तो बल का नियम ज्ञात कीजिए।

(b) Prove analytically that when the central acceleration varies as some integral power of the distance, there are at the most two apsidal distance.

विश्लेषिक विधि से सिद्ध करो कि जब केन्द्रीय त्वरण दूरी की कोई पूर्णाकीय घात के समानुपाती हो तब अधिकतम दो स्तब्धिका दूरियाँ होती हैं।

Q.6. (a) A particle describes an ellipse under a force  $\mu/(distance)^2$  towards the focus; if it was projected with velocity  $V$  from a point distance  $r$  from the centre of force, show that its periodic time is

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left[ \frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu} \right]^{-3/2}$$

एक कण एक बल, जो कि  $\mu/(दूरी)^2$  है और नाभि की ओर है, के अधीन एक दीर्घवृत्त का निर्माण करता है। यदि इसे एक बिन्दु से, जिसकी दूरी बल केन्द्र से  $r$  है,  $V$  वेग से प्रक्षिप्त किया गया हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसका आवर्तकाल होगा:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left[ \frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu} \right]^{-3/2}$$

(b) A planet describes an ellipse about the sun as focus. Prove that its velocity at the end of the minor axis is geometric mean between its velocities at the ends of any diameter.

एक ग्रह नाभिका में स्थित सूर्य के प्रति एक दीर्घवृत्त बनाता है। सिद्ध करो कि लघु अक्ष के एक सिरे पर इसका वेग किसी भी व्यास के सिरों पर के वेग का ज्यामितीय माध्य होगा।

## UNIT-IV

**Q.7. (a)** Find loss of kinetic energy by direct impact of two smooth elastic spheres.

दो चिकने प्रत्यास्थ गोलों के सीधे संघट्ट से गतिज ऊर्जा का ह्रास ज्ञात कीजिए।

(b) A ball A of mass  $m_1$  impinges directly on another ball B of mass  $m_2$  which is at rest. After the impact, B impinges directly on the third ball C of mass  $m_3$  which is also at rest. If the velocity of the ball A before be  $u$  and the velocity imparted to C be  $v$  and if  $e$  be the coefficient of restitution, show that:

$$(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)v = m_1 m_2 (1 + e)^2 u$$

$m_1$  संहति की एक गेंद  $A$ ,  $m_2$  संहति की दूसरी गेंद  $B$  से सीधी टकराती है जो विरामावस्था में है। संघट्ट के पश्चात् गेंद  $B$  एक  $m_3$  संहति की तीसरी गेंद  $C$  से सीधी टकराती है जो कि विरामावस्था में है। यदि गेंद  $A$  का संघट्ट से पूर्व वेग  $u$  तथा गेंद  $C$  का संघट्ट के पश्चात् वेग  $v$  हो तथा  $e$  प्रत्यास्थता गुणांक हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)v = m_1 m_2 (1 + e)^2 u$$

**Q.8. (a)** A ball impinges on another ball of equal mass at rest. If both balls are smooth and perfectly elastic, then prove that they move at right angles after impact. What will happen in case of direct impact?

एक गोला बराबर संहति वाले एक अन्य स्थिर गोले के तिर्यक टक्कर मारता है। यदि दोनों गोले चिकने तथा पूर्ण प्रत्यास्थ हो, तो सिद्ध करो कि टक्कर के पश्चात् वे एक दूसरे के समकोण दिशाओं में चलेंगे। बताओं सीधी टक्कर की अवस्था में क्या होगा।

(b) A ball moving with a velocity 8 ft, per second impinges at an angle of  $30^\circ$  on a smooth plane, find the velocity and direction of motion after impact, the coefficient of restitution being  $\frac{1}{2}$ .

$30^\circ$  का कोण बनाते हुए, 8 फीट प्रति सैकण्ड के वेग से एक गेंद किसी चिकने क्षैतिज तल से टकराती है। यदि प्रत्यास्थता गुणांक  $\frac{1}{2}$  हो, तो संघट्ट के पश्चात् इसका वेग तथा गति की दिशा ज्ञात करो।

**B.Sc. (Hons.) Sixth Semester  
(Assignment)  
MATHEMATICS  
FOURTH PAPER  
Statistics-II**

**UNIT-I**

Q.1. (a) Give the axiomatic definition of probability. With the help of axioms of probability, prove that if  $A$  is an empty set in a finite sample space  $S$ , then  $P(A) = 0$ .

प्रायिकता की अभिगृहीतीय परिभाषा दीजिए। प्रायिकता अभिगृहीत की सहायता से सिद्ध कीजिए कि यदि परिमित समष्टि  $S$  में  $A$  एक रिक्त समुच्चय है तब  $P(A) = 0$

(b) State and prove Baye's Theorem.

बेज प्रमेय को व्यक्त एवं सिद्ध कीजिए।

Q.2. (a) Explain the following: Random experiment, simple and compound events, mutually exclusive events, independent events, odds.

निम्न की व्याख्या कीजिए: यादृच्छिक अभिकल्पना, सरल एवं संयुक्त घटनाएँ, परस्पर अपवर्जी घटनाएँ, स्वतंत्र घटनाएँ, संयोगानुपात।

(b) Three groups of children contain respectively 3 girls and 1 boy, 2 girls and 2 boys, 1 girl and 3 boys. One child is selected at random from each group. Find the probability that the selected children contain 1 girl and 2 boys.

बच्चों के तीन समूहों में क्रमशः 3 लड़कियाँ 1 लड़का, 2 लड़कियाँ व 2 लड़के, 1 लड़की व 3 लड़कें हैं। प्रत्येक समूह में से यादृच्छिक रूप से एक बच्चे का चयन किया गया। चुने गये बच्चों में 1 लड़की एवं 2 लड़के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

**UNIT-II**

Q.3. (a) Define probability density function and distribution function of one dimensional random variable and prove that :

प्रायिकता घनत्व फलन तथा बंटन फलन को परिभाषित कीजिए तथा एकल यादृच्छिक चर के बंटन के लिए सिद्ध कीजिए:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

(b) Define mathematical expectation of a random variable. If  $X$  and  $Y$  are two independent random variables then prove that:

एक यादृच्छिक चर की गणितीय प्रत्याशा को परिभाषित कीजिए। यदि  $X$  और  $Y$  दो स्वतंत्र चर हैं तो सिद्ध कीजिए:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

Q.4. (a) Define moment generating function and give its limitations. Prove that the moment generating function of the sum of a number of independent random variables is equal to the product of their respective moment generating functions.

आघूर्ण जनक फलन को परिभाषित कीजिए एवं इसकी संकीर्णताएँ बताइये। सिद्ध कीजिए कि स्वतंत्र चरों के योग का आघूर्ण जनक फलन उनके अलग-अलग आघूर्ण जनक फलनों के गुणन के बराबर होता है।

(b) Two unbiased dice are thrown. If  $X$  is the sum of numbers shown up, prove that:

दो अनभिनत पाशे फेंके गये। यदि  $X$  उनके ऊपर आने वाली संख्याओं के योग को प्रदर्शित करें तो सिद्ध कीजिए:

$$P_r(|X - 7| > 3) \leq \frac{35}{54}$$

compare this with the actual probability.

इसकी वास्तविक प्रायिकता से तुलना कीजिए।

**UNIT-III**

Q.5. (a) Obtain the moment generating function of binomial distribution. If  $X$  and  $Y$  are binomial variates then prove that  $X+Y$  is not a binomial variate. Under which condition  $X+Y$  be a binomial variate?

द्विपद बंटन का आघूर्णजनक फलन ज्ञात कीजिए। यदि  $X$  एवं  $Y$  दो द्विपद चर हैं तो सिद्ध कीजिए कि  $X + Y$  एक द्विपद चर नहीं है। किन परिस्थितियों में  $X + Y$  द्विपद चर होगा?

(b) Prove that Poisson distribution is a limiting case of binomial distribution.

सिद्ध कीजिये कि प्वासॉ बंटन द्विपद बंटन का सीमान्त बंटन है।

Q.6. (a) Define Rectangular Distribution and find its mean deviation about mean.

आयतीय बंटन को परिभाषित कीजिए एवं इसका माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

(b) If  $X$  is a normal variate with mean 12 and standard deviation 4, then find out the probability of the following:

यदि  $X$  एक प्रसामान्य चर है जिसका माध्य 12 तथा प्रमाप विचलन 4 हो तो निम्न प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i)  $x \geq 20$

(ii)  $x \leq 20$

(iii)  $0 \leq X \leq 12$

(iv) find ज्ञात कीजिए  $x'$  when यदि  $P(X > x') = 0.24$

### UNIT-IV

Q.7. (a) Given the following bivariate probability distribution. Obtain (i) Marginal distribution of X and Y

(ii) The conditional distribution of X given Y=2

निम्न द्विचर प्रायिकता बंटन दिया गया है:

ज्ञात कीजिए (i)  $X$  एवं  $Y$  के उपांत बंटन (ii) यदि  $Y = 2$  दिया हुआ है तो  $X$  का सप्रतिबंधित बंटन

	X			
Y		-1	0	1
0		$1/15$	$2/15$	$1/15$
1		$3/15$	$2/15$	$1/15$
2		$2/15$	$1/15$	$2/15$

(b) The random variables X and Y have the joint density function:

दो दैविक चरों  $X$  और  $Y$  का संयुक्त घनत्व फलन

$$f(x, y) = 8xy \quad 0 < x < y < 1$$

$$= 0 \quad \text{otherwise अन्यथा}$$

Find ज्ञात कीजिए :

(i)  $P\left(x < \frac{1}{2} \cap y < \frac{1}{4}\right)$

(ii) The marginal distributions of X and Y

$X$  और  $Y$  का सीमान्त बंटन

(iii) Are X and Y independent? Give reason for your answer.

क्या  $X$  एवं  $Y$  स्वतंत्र चर हैं? अपने उत्तर में कारण बताइये।

Q.8. (a) Explain Central Limit Theorem and give its applications.

केन्द्रीय सीमान्त प्रमेय को समझाइये और इसके उपयोग दीजिए।

(b) The joint p.d.f. of two random variables X and Y is given by:

दो यादृच्छिक चरों  $X$  एवं  $Y$  का संयुक्त घनत्व फलन दिया गया है:

$$f(x, y) = \frac{9(1+x+y)}{2(1+x)^4(1+y)^4}; \quad \begin{matrix} 0 < x < \infty \\ 0 < y < \infty \end{matrix}$$

Find the marginal distributions of X and Y and the conditional distribution of Y for  $X = x$ .

$X$  एवं  $Y$  का सीमांत बंटन ज्ञात कीजिए तथा  $X = x$  के लिए  $Y$  का सप्रतिबंधित बंटन भी ज्ञात कीजिए।