Department of Mathematics

B.Sc. (Mathematics)

Assignment-2025

Note: Attempt any Four Questions in each paper of your Semester.

B.A. / B.Sc / B. Sc.(Mathematics) Sem-I

MATHEMATICS

Discrete Mathematics and Optimization Techniques-I

Unit I

1.(a) If A, B and C are any three sets , then prove that : $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

यदि A, B और C कोई भी तीन समुच्चय हों, तो यह सिद्ध कीजिए कि:
A×(B∩C) = (A×B) ∩(A×C))

(b) If $S = \{(a, b): 1 + ab > 0; a, b \in R\}$ is a relation on the set R of real numbers, then show whether S is an equivalence relation or not.

यदि S={(a,b):1+ab>0; a,b∈R} वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर एक संबंध है,तो यह दिखाइए कि S तुल्यता संबंध है या नहीं ।

2. (a) Prove that in a Boolean algebra $(B, +, ., ', 0,1)$, binary relation " $\leq$ " defined by (a$\leq b \Leftrightarrow ab' = 0; a, b \in B$) is a partial order relation.

सिद्ध कीजिए कि किसी बूलियन बीजगणित (B,+,·,',0,1में, द्विआधारी संबंध "≤" को इस प्रकार परिभाषित किया गया है: (a≤b ⇔ ab'=0; a,b∈B) तो यह संबंध एक **आंशिक क्रम संबंध** है।

(b) Define minterm and maxterm for a Boolean algebra. Express the following Boolean function in its conjunctive normal form:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3).(x_1.x_2 +_1 x'.x_3)'.$$

किसी बूलियन बीजगणित में न्यून पद और अधिक पद को परिभाषित कीजिए। निम्नलिखित बूलियन फलन को उसके संयोजक सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए।

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3).(x_1.x_2 +_1 x'.x_3)'.$$

Unit II

3.(a) Solve the following recurrence relation

निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध को हल कीजिए

$$a_r = a_{r-1} + a_{r-2}; r \geq 2, a_0 = 0, a_1 = 1.$$

(b) Using generating function find the solution of the following recurrence relation:

जनक फलन का उपयोग करके निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध का हल निकालिए

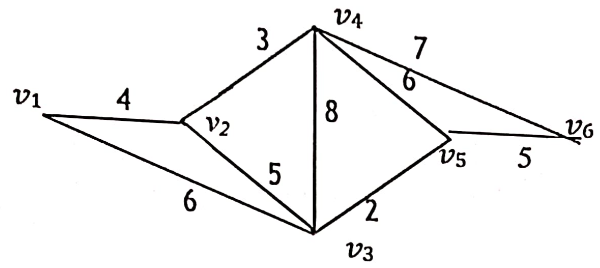
$$a_r - 2a_{r-1} = 5; r \geq 1, a_0 = 1$$

4. (a) Define Degree of a Vertex. Prove that the number of vertices of odd degrees in a graph is always even.

शीर्ष की कोटि को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि किसी ग्राफ में विषम कोटि वाले शीर्षों की संख्या हमेशा सम होती है।

(b) Find the shortest path and shortest distance from the vertices v_1 to v_6 in the following weighted graph.

निम्नलिखित भारित ग्राफ में शिखर v_1 से v_6 तक का सबसे छोटा मार्ग और सबसे छोटी दूरी ज्ञात कीजिए।



Unit III

5.(a) Prove that a connected graph has an Euler trail if and only if it has at most two vertices of odd degree.

सिद्ध कीजिए कि कोई संबद्ध ग्राफ तब और केवल तब एक ऑयलर ट्रेल (Euler Trail) रखता है जब उसमें अधिकतम दो विषम कोटि वाले शीर्ष हों।

2

(b) Find product $G_1 \times G_2$ and composition $G_1[G_2]$ of the following two graphs G_1 and G_2. Also write number of vertices and edges in the resulting graphs:-

निम्नलिखित दो ग्राफ G1 और G2 का गुणनफल G1× G2 और संयोजन G1[G2] ज्ञात कीजिए। साथ ही, प्राप्त होने वाले ग्राफ में शीर्षों (vertices) और कोरे (edges) की संख्या भी लिखिए।

Graph G_1

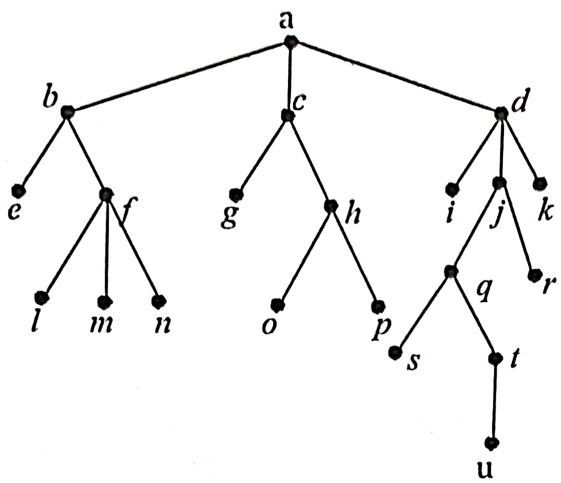
Graph G_2

6.(a) Define Trivial Tree. Prove that every non trivial tree contains at least two pendant vertices.

तुच्छ वृक्ष (Trivial Tree) को परिभाषित कीजिए।
सिद्ध कीजिए कि हर अतुच्छ वृक्ष (non-trivial tree) में कम से कम दो निलंबी शीर्ष होते हैं।

(b) Answer the following questions about the rooted tree shown below:

i) List all the internal vertices of the tree उस वृक्ष के सभी आंतरिक शीर्षों की सूची बनाइए।
ii) Which vertices are children of j? कौन-कौन से शीर्ष j के शिशु हैं?
iii) Which vertice is the parent of h? h का माता-पिता कौन सा शिखर है?
iv) Which vertices are ancestors of m? m के पूर्वज कौन-कौन से शिखर हैं?
v) Which vertices are descendants of b? b के वंशज कौन-कौन से शिखर हैं?



Unit IV

7. Solve the following L.P.P.
निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या (L.P.P.) को हल करें।

अधिकतम (Max.) $z = 5x_1 + 3x_2$

प्रतिबंध (s.t.) $3x_1 + 5x_2 \leq 15$

$5x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

8. Solve the following Assignment Problem.
निम्नलिखित नियतन समस्या को हल करें।

Task (कार्य)	Subordinates (अधीनस्थ कार्यकर्ता)			
	I	II	III	IV
A	8	26	17	11
B	13	28	4	26
C	38	19	18	15
D	19	26	24	19

*****

Assignment

B.Sc. (Mathematics)

Sem - I

Paper - II (Number Theory)

Attempt Any Four Questions.

Unit-I

Q.1(a) If a and b are any two integers not both zero, then show that there exist integers x and y such that $\gcd(a,b) = ax+by$

यदि a व b कोई दो पूर्णांक हैं जो साथ में शून्य नहीं हैं, तब प्रदर्शित कीजिए कि पूर्णांकों x व y का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि $\gcd(a,b) = ax+by$

(b) Find the gcd of 256 and 1166 and express in the form $256x + 1166y$.

256 तथा 1166 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए तथा इसे $256x + 1166y$ के रूप में व्यक्त कीजिये।

OR

Q.2(a) Prove that for any given integers a (the dividend) and non-zero integer $b>0$ (the divisor), there exist unique integer q (quotient) and r (the remainder) satisfying

$$a = qb+r, \quad 0 \le r < b$$

सिद्ध कीजिए कि दिए पूर्णांक a (भाज्य) तथा अशून्य पूर्णांक $b>0$ (भाजक) के लिए अद्वितीय पूर्णांक q (भागफल) तथा r (शेषफल) विद्यमान हैं जो $a = qb+r$, $0 \le r < b$ को संतुष्ट करते हैं।

(b) Show that the cube of any integer of the form $7k$ or $7k \pm 1$

प्रदर्शित कीजिए कि किसी भी पूर्णांक का घन $7k$ या $7k \pm 1$ प्रकार का होगा।

Unit-II

Q.3 (a) Find the last two digits of the number 9^{9^9}.

संख्या 9^{9^9} के अन्तिम दो अंक प्राप्त कीजिए।

(b) Solve the system of linear Congruence

रैखिक समशेष निकाय को हल कीजिए

$$x \equiv 3 \pmod{11}$$
$$x \equiv 5 \pmod{19}$$
$$x \equiv 10 \pmod{29}$$

OR

Q.4 (a) Show that $\tau(n) = \tau(n+1) = \tau(n+2) = \tau(n+3)$ for $n = 3655$

$n = 3655$ के लिए सिद्ध कीजिये कि $\tau(n) = \tau(n+1) = \tau(n+2) = \tau(n+3)$

(b) Show that $\phi(n)\,\sigma(n)$ is a perfect square when $n = 63457$.

सिद्ध कीजिये कि जब $n = 63457$ होता है तब $\phi(n)\,\sigma(n)$ एक पूर्ण वर्ग होता है।

Unit-III

Q.5 (a) Find the positive solution of following equation ~~11x+5y=79~~

(निम्न समीकरण का धनात्मक हल प्राप्त कीजिए)

$$11x + 5y = 79$$

(b) The general integer solution of the equation
समीकरण का सामान्य पूर्णांक हल

$x^2 + y^2 + z^2 = w^2, \quad (x, y, z, w) = 1$

is given by (दिया गया है)

$x = a^2 - b^2 + c^2 - d^2$

$y = 2ab + 2cd$

$z = 2ad - 2bc$

$w = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

OR

Q.6(a) If x, y, z is a solution $x^2 + y^2 = z^2$ and $(x, y, z) = 1$ then of x, y there is a multiple of 3 and a multiple of 4. Also one of x, y, z is a multiple of 5. Hence, xyz is a multiple of 60.

यदि x, y, z समीकरण $x^2 + y^2 = z^2$ तथा $(x, y, z) = 1$ का एक हल है तो x, y 3 तथा 4 के गुणांक हैं; x, y, z में से एक 5 का गुणांक है। फलतः xyz, 60 का गुणांक है।

Unit - IV

Q.7(a) Solve the quadratic congruence:
निम्न द्विघात समीकरण को हल कीजिये

$5x^2 - 6x + 2 \equiv 0 \pmod{13}$

(b) Evaluate $(-46/17)$
मान ज्ञात कीजिये $(-46/17)$

OR

Q.8 (a) Show that 3 is a quadratic residue of 23, but a nonresidue of 31.

सिद्ध कीजिए कि 3 द्विघात अवशेष होता है 23 का लेकिन यह 31 का द्विघात अवशेष नहीं होता है।

(b) State and prove Quadratic Reciprocity Law.

द्विघात पारस्पारिकता नियम का कथन लिखिए एवं इसे सिद्ध कीजिए।

B.Sc. (Hons. Mathematics) Third Semester

MATHEMATICS

First PAPER

Numerical Analysis

Assignment

1. Use Newton Gregory difference interpolation formula to compute y(3.62) and (3.72) from the following table:

X	3.60	3.65	3.70	3.75
Y	36.598	38.475	40.447	42.521

2. Find the value of f(2) , f(8) and f(15) from the following table:

X	4	5	7	10	11	13
Y	48	100	294	900	1210	2028

3. (a) Given the following data, find the value of the following integral using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule and compare it with the actual value.

निम्न आंकड़ों से निम्न समाकल का सिम्पसन के $\frac{1}{3}$ नियम द्वारा मान ज्ञात कीजिए तथा वास्तविक मान से इसकी तुलना कीजिए।

$$\int_0 e^x dx, \quad e = 2.72, \quad e^2 = 7.39; \quad e^3 = 20.09, \quad e \doteq 54.60$$

(b) Use Gauss's forward formula to find out y for $x = 30$, given the following data.

गॉस के अग्र अन्तर्वेशन सूत्र का उपयोग करके निम्न संमको के आधार पर $x = 30$ के लिए y के मान का आकलन कीजिए।

x	21	25	29	33	37
y	18.47	17.81	17.10	16.34	15.51

4. (a) Compute the value of following integral by Trapesoidal rule

ट्रेपिजोइडल (समलम्बीय) नियम द्वारा निम्न समाकल के मान का परिकलन कीजिए

$$\int_{0.2}^{1.4} (\sin x - \log_e x + e^x) dx$$

(b) Find the value of $f'(.04)$ from the following table

निम्न सारणी से $f'(.04)$ का मान ज्ञात कीजिए

x	.01	.02	.03	.04	.05	.06
y	.1023	.1047	.1071	.1096	.1122	.1148

5. Solve the following system of equation up to third order approximation by Jacobii iterative method.

निम्न समीकरण निकाय का जॅकोबी पुनरावृति विधि द्वारा तृतीय सन्निकट तक हल ज्ञात कीजिए।

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 - x = 5$$
$$3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x = 6$$
$$4x_1 - x_2 + 3x = 7$$

6. Find the root of $x \quad - x - 10 = 0$ which is near to x=2 correct to the three place of decimals by Newton- Raphson Method.

7. Solve the equation $\frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 1$ by Runge-Kutta Method from $x = 0.1$ to $x = 0.4$ with $h = 0.1$.

8. Solve the equation $\frac{dy}{dx} = x + y^2, y(0) = 0$ by Picard Method upto thid order of Approximation.

B.Sc. (Mathematics) III Semester
Subject: Mathematics
Paper II
Real Analysis-I

1. (a) Write an example of an ordered field which is not complete. Justify your answer.
एक क्रमित क्षेत्र का उदाहरण दीजिए जो कि पूर्ण नहीं है। अपने उत्तर को स्पष्ट कीजिए।
(b) Prove that the intersection of an arbitrary collection of closed sets is closed.
सिद्ध कीजिए कि संवृत समुच्चयों का स्वेच्छ सर्वनिष्ठ निर्धारण एक संवृत समुच्चय होता है।

2. (a) Prove that the set of real numbers is not compact.
सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय संहत नहीं है।
(b) Prove that, between any two real numbers, there be an infinite Rational Numbers.
सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं के बीच अनंत परिमेय संख्या होती है।

3. (a) Prove that every bounded sequence has a convergent subsequence.
श्सद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम का एक अभिसारी उपानुक्रम होता है।

(b) Prove that the sequence $\{x_n\}$ where $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \forall n \in N$ is convergent.
श्सद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$ जहाँ $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \forall n \in N$ अभिसारी है।

4. (a) Prove that the sequence $\{x_n\}$, where $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{2x_n+3}{4}$ $\forall n \in N$ is convergent.
सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$ जहाँ $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{2x_n+3}{4}, \forall n \in N$ अभिसारी है।
(b) State and prove Bolzano-Weierstrass theorem for real sequence.
वास्तविक अनुक्रम के लिए बोल्ज़ानो-वीयरस्ट्रैस प्रमेय बताएं और सिद्ध करें।

5. (a) Let f be a continuous function defined on $[a, b]$. Then prove that f is bounded on $[a, b]$.
माना $f, [a, b]$ पर परिभाषित एक संतत् फलन है। तब सिद्ध कीजिए कि फलन f $[a, b]$ पर परिबद्ध है।
(b) Prove that if f be a continuous function defined on $[a, b]$ such that $f(x) \in [a, b]$ for each $x \in [a, b]$ then there exists a point $x_0 \in [a, b]$ such that $f(x_0) = x_0$.
सिद्ध कीजिए कि यदि f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में संतत् फलन है ताकि $f(x) \in [a, b]$ $\forall x \in [a, b]$ तब एक बिन्दु $x_0 \in [a, b]$ इस प्रकार विद्यमान है कि $f(x_0) = x_0$

6. Prove that the following function is not continuous at the origin:
सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन मूल बिन्दु पर संतत् नहीं हैं:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

7. (a) Discuss the differentiability of the function $f(x) = |x - 2| + 2|x - 3|$ in the interval $[1,4]$.
अन्तराल $[1,4]$ में फलन $f(x) = |x - 2| + 2|x - 3|$ की अवकलनीयता की विवेचना कीजिए।

(b) Verify Roll's theorem for the function

$f(x) = e^x \sin x$, $\forall x \in (0, \pi)$

फलन $f(x) = e^x \sin x$, $\forall x \in (0, \pi)$ के लिए रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

8. (a) Check the differentiability of the function $f(x) = |x| + |x-1| + |x+1|$ at $x = 0$ *and* $x = 1$.

(b) Let f be a function defined on $[a, b]$ and $c \in (a, b)$ such that f is differentiable at the point c with $f'(c) > 0$. Then prove that there exists a neighbourhood of the point c such that f is strictly increasing in that neighbourhood.

माना एक फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित है तथा $c \in (a, b)$ इस प्रकार है कि f बिन्दु c पर अवकलनीय है तथा $f'(c) > 0$। तब सिद्ध कीजिए कि बिन्दु c का एक प्रतिवेश ऐसा विद्यमान होगा कि फलन f उस प्रतिवेश में निरन्तर वर्धमान होगा।

B.Sc.(Hons. Mathematics) Third Semester

MATHEMATICS

Third PAPER

Differential Equation-I

1. Solve (हल कीजिए) :

   a. $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$

   b. $sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2\tan y = x^3$

2. Solve (हल कीजिए) :

   a. $(x^2 - ay)dx = (ax - y^2)\, dy$

   b. $(x^3 + xy^2 + a^2 y)dx + (y^3 + yx^2 - a^2 x)dy = 0$

3. Solve (हल कीजिए) :

   a. $x^2 p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$

   b. $(x - a)p^2 + (x - y)p - y = 0$

4. Solve (हल कीजिए) :

   a. $(D^4 + 2D^3 + 3D^2 + 2D + 1)\, y = 0$

   b. $(\mathrm{D}^2 + a^2)^2 y = Sin\, ax$

5. Solve (हल कीजिए) :

   a. $x^2 \frac{{}^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$

   b. $x^2 \frac{{}^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = x\, log\, x$

6. Solve (हल कीजिए) :

   a. $D^2 x + m^2 y = 0, \quad D^2 y + m^2 x = 0$

   b. $\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)}$

7. Solve (हल कीजिए) :

   $sin^2 x\, \frac{{}^2y}{dx^2} = 2y$

8. Examine the existence and uniqueness of the solution of the following initial value problem.

   निम्न प्रारम्भिक मान समस्या के हल के अस्तित्व व अद्वितीयता का परिक्षण कीजिए

   $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} y^{1/3}, \qquad y(0) = 0$

B.Sc.(Mathematics) Fifth Semester

MATHEMATICS

FIRST PAPER

Advanced Abstract Algebra

Attempt any four Questions.

1. (a) Prove that, every homomorphic image of a ring R is isomorphic to some quotient ring (residue class ring) thereof.
सिद्ध कीजिए कि किसी वलय R की प्रत्येक समाकारिक प्रतिबिम्ब उसकी किसी विभाग वलय के तुल्यकारी होती है।

(b) Prove that a commutative ring with unity is a field if it has no proper ideals or if it is simple.
सिद्ध कीजिए कि, एक क्रमविनिमेय तत्सम की वलय एक क्षेत्र होता है यदि इसकी कोई उचित गुणजावली न हो या यह एक सरल वलय हो।

2. (a) Prove that an ideal I of a commutative ring R with unity is maximal iff the quotient ring $R/_I$ is a field.
सिद्ध कीजिए कि तत्सम की क्रमविनिमेय वलय R की कोई गुणजावली I एक उच्चिष्ठ गुणजावली है यदि और केवल यदि विभाग वलय $R/_I$ एक क्षेत्र है।

(b) Prove that, the ring $(z, +, \cdot)$ of integers is a principal ideal domain.
सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों की वलय $(z, +, \cdot)$ एक मुख्य गुणजावली प्रान्त है।

3. (a) Prove that, every integral domain can be embedded into a field.
सिद्ध कीजिए कि किसी पूर्णांकीय प्रान्त को एक क्षेत्र में अन्तः स्थापित किया जा सकता है।

(b) Prove that, the field $< z_p, +_p, \cdot_p >$ is a prime field for each prime number p.
सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र $< z_p, +_p, \cdot_p >$ प्रत्येक अभाज्य सँख्या p के लिए, एक अभाज्य क्षेत्र है।

4. (a) Prove that, the set F^n of all ordered n – tuples of a field F is a vector space over the field F for the vector addition and scalar multiplication defined as
सिद्ध कीजिए कि किसी क्षेत्र F के अवयवो के n क्रमित तुपलों का समुच्चय F^n, क्षेत्र F पर निम्न परिभाषित सदिश योग व अदिश गुणन के लिए एक सदिश समिष्ट है।
$(a_1, a_2, \dots \dots a_n) + (b_1, b_2, \dots \dots b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots \dots a_n + b_n)$
$\propto (a_1, a_2, \dots \dots a_n) = (\propto a_1, \propto a_2, \dots \dots \propto a_n)$
where (जहाँ) $(a_1, a_2, \dots \dots a_n), (b_1, b_2, \dots \dots b_n) \in F^n \quad \propto \in F$

(b) Prove that, the set S of all solutions satisfying the simultaneous equations $ax + by + cz = 0$ and $dx + ey + fz = 0$, where $a, b, c, d, e, f \in R$ is a subspace of vector space $V = R^3$ over the field R.
सिद्ध कीजिए कि युगपत समीकरणों $ax + by + cz = 0$ तथा $dx + ey + fz = 0$ के समस्त हलों का समुच्चय S, जहाँ $a, b, c, d, e, f \in R$ पर सदिश समष्टि $V = R^3$ का क्षेत्र R पर उपसमष्टि है।

5. (a) Prove that the vectors $v_1 = (1 + i, 2i), v_2 = (1, 1 + i)$ are linearly dependent in the vector space $V_2(C)$ but are linearly independent in the vector space $V_2(R)$.
सिद्ध कीजिए कि सदिश $v_1 = (1 + i, 2i), v_2 = (1, 1 + i)$ सदिश समिष्ट $V_2(C)$ में एकघाततः परतन्त्र है परन्तु सदिश समष्टि $V_2(R)$ में एकघाततः स्वतंत्र है।

(b) Prove that, the set of non – zero vectors $\{v_1, v_2 \dots\dots v_n\}$ of a vector space $V(F)$ is linearly dependent iff some $v_k, 2 \le k \le n$ is a linear combination of the preceding vectors.
किसी सदिश समिष्ट $V(F)$ के अशून्य सदिशों का समुच्चय $\{v_1, v_2 \dots\dots v_n\}$ एकघाततः आश्रित (परतंत्र) होगा यदि और केवल यदि कोई एक $v_k, 2 \le k \le n$ अपने पूर्ववर्ती सदिशों का एकघात संचय हो।

6. (a) If S and T are finite dimensional subspaces of a vector space, then prove that
$\dim S + \dim T = \dim(S + T) + \dim(S \cap T)$.
यदि S एवं T किसी सदिश समिष्ट की परिमित विमिय उपसमिष्टयाँ हो, तो सिद्ध कीजिए
विमा S + विमा T =विमा $(S + T)$ + विमा $(S \cap T)$

(b) Prove that a vector space $V(F)$ is a direct sum of its two subspaces $U(F)$ and $W(F)$ iff
(i) $V = U + W$ (ii) $U \cap W = \{0\}$
सिद्ध कीजिए कि एक सदिश समिष्ट $V(F)$ अपनी दो उपसमिष्टयों $U(F)$ और $W(F)$ का अनुलोम योगफल होगी यदि और केवल यदि
(i) $v = U + W$ (ii) $U \cap W = \{0\}$

7. (a) If $W(F)$ is any subspace of a vector space $V(F)$, then prove that the set $\frac{V}{W}$ of all co sets $W + v, v \in V$ is a vector space over the field F for the vector addition and scalar multiplication defined as
यदि $W(F)$ सदिश समिष्ट $V(F)$ की उपसमिष्ट है तो सिद्ध कीजिए कि W के V में सहसमुच्चयों $\frac{V}{W} = \{W + v, v \in V\}$ क्षेत्र $(F, +, \cdot)$ पर निम्न सदिश योग तथा अदिश गुणन संक्रिया के लिए सदिश समिष्ट होता है
$(W + v_1) + (W + v_2) = W + (v_1 + v_2) \ \forall\, v_1, v_2 \in V$ and (और) $\propto \cdot (W + v) = W + \propto \cdot\, v, \propto \in k, v \in V$

(b)Show that the mapping $t: V_2(R) \to V_2(R)$ defined by $t(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ is an isomorphism.
सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $t: V_2(R) \to V_2(R)$ जहाँ $t(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$समिष्ट $V_2(R)$ पर एक तुल्यकारिता है।

8. (a) Prove that, the kernel of a linear transformation $t: V \to V'$ is a subspace of the vector space V.

सिद्ध कीजिए कि रैखिक प्रतिचित्रण $t: V \to V'$ की अष्टि, सदिश समिष्ट V की उपसमिष्ट होती है।
(a) Prove that $t: R^3 \to R^3$, defined as $t(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$ is a linear transformation. Also find the rank and nullity of t.
सिद्ध कीजिए कि $t: R^3 \to R^3$, $t(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$ एक रैखिक रूपान्तरण है तथा t की कोटि एवं शून्यता ज्ञात कीजिए।

B.Sc. (Mathematics) Fifth Semester
(Assignment)
MATHEMATICS
SECOND PAPER
Advanced Complex Analysis

Q.1. (a) Prove that a power series represents an analytic function inside its circle of convergence.
सिद्ध कीजिये कि एक घात श्रेणी अपने अभिसरण वृत के अन्दर प्रत्येक विन्दु पर विश्लेषिक फलन निरूपित करता है।

(b) Prove that the sequences $\left\{\frac{1}{1+nz}\right\}$ is uniformly convergent to zero in the region $|z| \geq 2$.
सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\{\frac{1}{1+nz}\right\}$ क्षेत्र $|z| \geq 2$ में शून्य को एक समान अभिसृत होती है।

Q.2. (a) Find the region of convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$.
श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$ का अभिसरण क्षेत्र प्राप्त कीजिये।

b) Show that the function $f(z) = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \cdots$ .... can be continued analytically outside the circle of convergence. Also construct a power series which is analytic continuation of given series.

सिद्ध कीजिये कि फलन $f(z) = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \cdots$ .... का विश्लेषिक सांतत्य अभिसरण वृत के बाहर किया जा सकता है। एक घात श्रेणी की रचना भी कीजिये जो कि दी हुई श्रेणी का विश्लेषिक सांतत्य है।

Q.3. State and prove Taylor's Theorem for complex functions.
कथन सहित सम्मिश्र फलनों के लिए टेलर प्रमेय को सिद्ध कीजिये।

Q.4. Prove that (सिद्ध कीजिये)

$$\sin\left\{c\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n + z^{-n})$$

where (जहाँ)

$$a_n = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} \sin(2c\cos\theta) \cos n\theta \, d\theta.$$

Q.5. Evaluate the integral $\frac{1}{2\Pi i}\int_c \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz$ around the circle $c: |z| = 3$.
परिरेखा वृत $c: |z| = 3$ पर समाकल $\frac{1}{2\Pi i}\int_c \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz$ का मान ज्ञात कीजिये।

Q.6. State and prove Rouche's Theorem.
कथन सहित रूशे प्रमेय को सिद्ध कीजिये।

Q.7. Discuss the transformation $w = z^2$. Find the images of the hyperbolas $x^2 - y^2 = c$ and $xy = d$ under this transformation.
रूपान्तरण $w = z^2$ की विवेचना कीजिये। अतिपरवलयों $x^2 - y^2 = c$ तथा $xy = d$ का इस रूपान्तरण में प्रतिचित्रण ज्ञात कीजिये।

Q.8. By integrating $\frac{e^{iz^2}}{z}$ round a suitable contour, prove that $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx = \frac{\Pi}{4}$ also deduce that $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\Pi}{2}$.
फलन $\frac{e^{iz^2}}{z}$ को उपयुक्त परिरेखा पर समाकलन करते हुए सिद्ध कीजिये कि $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx = \frac{\Pi}{4}$ तथा निगमन भी कीजिये कि $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\Pi}{2}$.

B.Sc. (Mathematics) - V Semester
Paper III - Dynamics
Assignment

Attempt any 4 questions. [redacted]

Unit I

1. (a) An insect crawls at a constant rate 'u' along the spoke of a cart wheel of radius 'a'. The cart is moving with velocity 'v'. Find the acceleration along and perpendicular to the spoke of the insect at time 't'.
एक कीड़ा किसी गाड़ी के 'a' त्रिज्या वाले पहिये के आरे पर 'u' अचर चाल से रेंगता है और गाड़ी 'v' वेग से चलती है। 't' समय पर आरे की दिशा में तथा उसके लम्बवत दिशा में कीड़े के त्वरण ज्ञात कीजिए।

(b) A particle is describing a circle of radius 'a' in such a way that the tangential acceleration is always 'k' times the normal acceleration. If its speed at a certain point is 'u', prove that it will return to the same point after 'a' time $\frac{a}{ku}(1-e^{-2\pi k})$

एक कण a' त्रिज्या के वृत्त मे ऐसे चलता है कि उसका स्पर्श रेखीय त्वरण उसके अभिलाम्बिक त्वरण का सदेव 'k'गुणा रहता है। यदि किसी बिन्दु पर उसकी चाल 'u' हो तो सिद्ध करो कि वह उसी बिन्दु पर $\frac{a}{ku}(1-e^{-2\pi k})$ समय पश्चात लौट आयेगा।

2. (a) A particle is performing S.H.M. of period T about a centre O and it passes through a point P (where OP = b) with a velocity v in the direction OP. Prove that the time that elapses before it returns to P is $\frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{vT}{2\pi b}\right)$
एक कण केन्द्र O के सापेक्ष T आवर्तकाल की सरल आर्वत गति करे और यह किसी बिन्दु P (जहाँ OP = b), OP की दिशा मे v वेग से गुजरे, तो सिद्ध कीजिए कि वह P पर पुनः $\frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{vT}{2\pi b}\right)$ समय के पश्चात लौटेगा।

(b) If corresponding to two masses m_1 and m_2 attached to the end of a vertical elastic string, T_1 and T_2 be the periods of small oscillations and a_1 and a_2 the statical extensions corresponding to these masses, prove that $(T_1^2 - T_2^2) = 4\pi^2(a_1 - a_2)$.
यदि किसी ऊर्ध्वाधर प्रत्यास्थ डोरी के लगे हुए दो विभिन्न m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के संगत लघु दोलन के आवर्तकाल T_1 तथा T_2 हो और उनके संगत स्थैतिक विस्तार a_1 तथा a_2 हो तो सिद्ध कीजिए कि $g(T_1^2 - T_2^2) = 4\pi^2(a_1 - a_2)$

Unit II

3. (a) A particle of mass 'm' is projected vertically upwards under gravity, the resistance of the air being mk times the velocity. Show that the greatest height attained by the particle is $\frac{V^2}{g}[\lambda - \log(1+\lambda)]$, where V is the terminal velocity of the particle λV is its initial velocity.
'm' संहति का एक कण गुरूत्वाकर्षण के अधीन ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर फैंका जाता है। यदि वायु का प्रतिरोध, वेग का mk गुणा हो तो सिद्ध कीजिए कि कण की अधिकतम ऊँचाई होगी $\frac{V^2}{g}[\lambda - \log(1+\lambda)]$ जहाँ माध्यम में कण का अन्तिम वेग है तथा λV इसका प्रारम्भिक ऊर्ध्वाधर वेग है।
(b) A particle falls from rest under gravity in a medium whose resistance varies as the square of the velocity, if v be the velocity actually acquired by it, v_0 the velocity it would have acquired had there been no resisting medium, and V the terminal velocity, prove that : $\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{V^2} + \frac{1}{2.3}\frac{v_0^4}{V^4} - \cdots \ldots$

एक कण गुरूत्वाकर्षण के अधीन विरामवस्था से एक ऐसे माध्यम में गिरता है जिसका प्रतिरोध वेग के वर्ग समानुपाती है। यदि v वह वेग है जो उसके द्वारा वास्तव में प्राप्त किया जाता है, v_0 वह वेग है जो वह प्राप्त कर लेता यदि कोई प्रतिरोधी माध्यम न होता और माध्यम में अन्तिम वेग V है, तो सिद्ध करो कि : $\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{V^2} + \frac{1}{2.3}\frac{v_0^4}{V^4} - \cdots \ldots$

4. (a) A projectile aimed at a mark which is in a horizontal plane through the point of projection, falls a feet too short when the elevation is 'α' and 'b' feet too far when the elevation is β. Show that, if the velocity of projection be the same in cell cases, the proper elevation to hit the mark is: $\frac{1}{2}sin^{-1}\left\{\frac{a\,sin2\beta + b\,sin2\alpha}{a+b}\right\}$

एक प्रक्षेप्य , उसके प्रक्षेप बिन्दु से होकर जाने वाले क्षैतिज तल में स्थित किसी लक्ष्य की और फेंका जाने पर उससे a फुट पहले रह जाता है, जबकि उसका α उन्नतांश होता है और जब उसका उन्नतांश होता β है तो लक्ष्य से b फुट आगे निकल जाता है। सिद्ध करो कि यदि प्रक्षेप वेग सभी अवस्थाओं में एक ही रहे तो लक्ष्य के लिए सही उन्नतांश होगा $\frac{1}{2}sin^{-1}\left\{\frac{a\,sin2\beta + b\,sin2\alpha}{a+b}\right\}$

(b) Shots are fired simultaneously from the top and bottom of a vertical cliff with elevations α and β respectively strike an object simultaneously at the same point. Show that, if 'a' is the horizontal distance of the object from the cliff, the height of the cliff is $a(\tan\beta - \tan\alpha)$.
एक ऊर्ध्वाधर मीनार की चोटी व पाद से दो गोलियाँ क्रमशः α व β कोण पर एक साथ इस प्रकार दागी जाती है कि वे एक साथ किसी वस्तु को एक ही बिन्दु पर टकराती है। यदि वस्तु की मीनार से क्षैतिज दूरी हो a, तो सिद्धं करो कि मीनार की ऊँचाई $\frac{1}{2}sin^{-1}\left\{\frac{a\,sin2\beta + b\,sin2\alpha}{a+b}\right\}$ होगी।

UNIT-III

5. A heavy particle of weight W, attached to a fixed point by a light inextensible string, describes a circle in a vertical plane. The tension of the string has the values mW and nW respectively, when the particle is at the highest and the lowest point of its path. Show that $n = m + 6$
एक W भार वाला कण जो कि स्थिर बिन्दु से एक भारहीन अवितान्य डोरी से बंधा है और ऊर्ध्वाधर तल में एक वृत में घूम रहा है। जब कण अधिकतम तथा न्यूनतम ऊँचाई पर होता है , तो डोरी में खिंचाव क्रमशः mW तथा nW होता है, तो सिद्ध कीजिए कि $n = m + 6$.

6. A particle slides down from rest, from the highest point of a smooth vertical circle. Discuss its motion.
एक कण किसी चिकने उर्ध्वाधर वृत के उच्चतम बिन्दु पर विरामावस्था से फिसलता है। इसकी गति की विवेचना कीजिए।

UNIT-IV

7. (a) Find the moment of inertia of a uniform rectangular lamina of sides $2a$, $2b$ and mass M about a line through centre and perpendicular to its plane.
$2a$ तथा $2b$ भुजाओं वाले तथा संहति M के किसी एक समान आयताकार पटल का उस रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए, जो पटल केन्द्र से गुजरे तथा तल के लम्बवत हो।
(b) Find the moment of inertia of a solid sphere of radius 'a' and mass 'M' about its diameter.
a त्रिज्या तथा M संहित के ठोस गोले का गोले के किसी व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

8. Show that the moment of inertia of a semicircular lamina about a tangent parallel to the bounding diameter is $Ma^2\left(\frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi}\right)$ where a is the radius and M is the mass of the lamina.
प्रदर्शित कीजिए कि अर्ध – वृतीय पटल का उसके सीमक व्यास के समान्तर सपर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण $Ma^2\left(\frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi}\right)$ है , जहाँ M पटल की संहित तथा a त्रिज्या है।