B.A./B.Sc./ B.Sc. (Mathematics) First Semester

MATHEMATICS

FIRST PAPER

Differential Calculus

Unit I

Q.1 Test the convergence of following series.

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जांच कीजिए।

$$\frac{2x}{1^2}+\frac{3^2x^2}{2^3}+\frac{4^3x^3}{3^4}+\frac{5^4x^4}{4^5}+\cdots$$

Q.2 Prove that the following series is divergent:

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी अपसारी है।

$$\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}+\cdots$$

Unit II

Q.3 Find Lagrange's and Cauchy's remainder after n terms in expansion of $\log(1+x)$.

$\log(1+x)$ फलन के प्रसार में n पदों के पश्चात लैग्रेंज तथा कौशी शेष पद प्राप्त कीजिए।

Q.4 Show that for the radius of curvature at a point $(a\,Cos^3\theta, aSin^3\theta)$ on the curve $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ is $\frac{3a}{2}\sin 2\theta$.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ के बिंदु $(a\,Cos^3\theta, aSin^3\theta)$ पर वक्रता त्रिज्या $\frac{3a}{2}\sin 2\theta$ होती है।

Unit III

Q.5 If $u=tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x+y}\right)$ then prove that $x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=sin2u(1-4sin\ u)$

यदि $u=tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x+y}\right)$, तो सिद्ध कीजिए कि $x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=sin2u(1-4sin\ u)$

Q.6 If $V=f(x-y,y-z,z-x)$ then prove that $\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}=0$

यदि $V=f(x-y,y-z,z-x)$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}=0$

Unit IV

Q.7 Find the envelope of the circle described on the radii vectors of the curve $r^n=a^n cos\ n\theta$ as a diameter.

उन वृत्तों का अन्वालोप कीजिए जो वक्र $r^n=a^n cos\ n\theta$ की ध्रुवान्तर रेखाओं को व्यास मानकर खींचे गए हैं।

Q.8 Find the points, where the value of $u=x^3+y^3-3axy$ is maximum or minimum.

उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जहां $u=x^3+y^3-3axy$ का मान उच्चतम तथा न्यूनतम है।

B.A./B.Sc./ B.Sc. (Mathematics) First Semester
MATHEMATICS
Second PAPER
Analytical Geometry

Unit I

1. Find the polar equation of a conic having pole on the foci of conic.

शांकव का ध्रुवी समीकरण ज्ञात कीजिये जब कि ध्रुव शांकव की नाभि पर स्थित हो.

2. Find the polar equation of the directrix (Near the pole) of the conic $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$

शांकव $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ की नियता का ध्रुवी समीकरण ज्ञात कीजिये।

Unit II

3(a) Find the equation to the sphere which passes through $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ and is cut by the plane $x + 2y + 2z = 0$ in a circle of radius 3.

वृत $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका समतल $x + 2y + 2z = 0$ से प्रतिच्छेदन 3 अर्द्धव्यास का एक वृत्त है।

(b) Prove that the polar plane of any point on the line $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{4}$ with respect to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ passes through the line $\frac{2x+3}{13} = \frac{y-1}{-3} = \frac{-z}{1}$.

सिद्ध कीजिए कि $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{4}$ के किसी बिन्दु पर तथा गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ के सापेक्ष एक ध्रुवीय समतल, रेखा $\frac{2x+3}{13} = \frac{y-1}{-3} = \frac{-z}{1}$ से गुजरता है।

4. Find the equation of the sphere that passes through two points $(0,3,0)$ and $(-2,-1,-4)$ and cuts orthogonally the two spheres $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3z - 2 = 0$ and $2(x^2 + y^2 + z^2) + x + 3y + 4 = 0$.
दो बिन्दुओं $(0,3,0)$ तथा $(-2,-1,-4)$ से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3z - 2 = 0$ तथा $2(x^2 + y^2 + z^2) + x + 3y + 4 = 0$ गोलों को लाम्बिक रूप से काटता है।

UNIT-III

5. (a) Find the enveloping cylinder of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ having its generators parallel to $x = y = z$. Also find the equation of its reciprocal cone.
गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ के उस अन्वालोपी बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक $x = y = z$ के समान्तर हैं। इसकी निर्देशक वक्र को भी ज्ञात कीजिए।

(b) Find the equation of the right circular cylinder having the line $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$ as axis and passes through the point $(0,0,3)$.

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी अक्ष $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$ है तथा जो बिन्दु $(0,0,3)$ से गुजरता है।

6 (a) Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and base is $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$
उसे शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) तथा आधार $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$ है।

(b) Find the equation of right circular cone whose axis is $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$, vertex $(1,1,1)$ and semi vertical angle is 30^0.

स लंबवृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$, शीर्ष $(1,1,1)$ तथा अर्ध शीर्ष कोण 30^0 है।

UNIT-IV

7. (a) Prove that the locus of the point of intersection of two perpendicular generators of the hyperboloid of one sheet is the curve of intersection of the hyperboloid and the director sphere.

सिद्ध कीजिए कि एक पृष्ठीय अतिपरवलयज के दो परस्पर लम्बवत् जनकों के प्रतिच्छेद विन्दु का विन्दुपथ नियामक गोला और अतिपरवलयज का प्रतिच्छेदी वक्र होता है।

(b) Find the center of the following conicoid:

निम्नलिखित शांकवज का केन्द्र ज्ञात कीजिए :

$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2yz + 2zx - 2xy + 2x + 12y + 10z + 20 = 0$

8. (a) Find the equations of generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ which pass through the point (3,-1,4/3).

बिंदु (3,-1,4/3) से गुजरने वाली तथा अतिपरवलयज $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ की जनक रेखाएं ज्ञात कीजिए।

(b) Find the equation to the tangent planes which contain the line given by $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$ and touch the conicoid $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$.

दो समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$ से जाते हैं और शांकवज $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ को स्पर्श करता है।

B.A./ B.Sc. III Semester
Mathematics
First Paper
Real Analysis

1. (a) Prove that the sequence $\{x_n\}$, where $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{2x_n+3}{4}$ $\forall n \in N$ is convergent.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$ जहाँ $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{2x_n+3}{4}$ $\forall n \in N$ अभिसारी है।

(b) Prove that the intersection of an arbitrary collection of closed sets is closed.

सिद्ध कीजिए कि संवृत समुच्चयों का स्वेच्छ सर्वनिष्ठ निर्धारण एक संवृत समुच्चय होता है।

2. (a) Prove that the set of real numbers is not compact.

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय संहत नहीं है।

(b) Prove that the sequence $\{x_n\}$ where $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\forall n \in N$ is convergent.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$ जहाँ $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\forall n \in N$ अभिसारी है।

3. (a**)** Prove that every bounded sequence has a convergent subsequence.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम का एक अभिसारी उपानुक्रम होता है।

(b) Let f be a continuous function defined on $[a, b]$. Then prove that f is bounded on $[a, b]$.

माना $f, [a, b]$ पर परिभाषित एक संतत् फलन है। तब सिद्ध कीजिए कि फलन f $[a, b]$ पर परिबद्ध है।

4. (a) Prove that if f be a continuous function defined on $[a, b]$ such that $f(x) \in [a, b]$ for each $x \in [a, b]$ then there exists a point $x_0 \in [a, b]$ such that $f(x_0) = x_0$.

सिद्ध कीजिए कि यदि f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में संतत् फलन है ताकि $f(x) \in [a, b]$ $\forall x \in [a, b]$ तब एक बिन्दु $x_0 \in [a, b]$ इस प्रकार विद्यमान है कि $f(x_0) = x_0$

(b) Prove that the following function is not continuous at the origin:

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन मूल बिन्दु पर संतत् नहीं हैं:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

5. (a) Discuss the differentiability of the function $f(x) = |x - 2| + 2|x - 3|$ in the interval [1,4].

अन्तराल [1,4] में फलन $f(x) = |x - 2| + 2|x - 3|$ की अवकलनीयता की विवेचना कीजिए।

(b) Verify Roll's theorem for the function

$f(x) = e^x \sin x$, $\forall x \in (0, \pi)$

फलन $f(x) = e^x \sin x$, $\forall x \in (0, \pi)$ के लिए रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

6. (a) State and Prove Darboux Theorem.

(b) If $f(x) = x, \forall\, x \in [0,1]$ then prove that function f is R-integrable

7. (a) Let $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ is a series of continuous functions $u_n(x)$, $\forall n \in N$ in $[a, b]$ and converges uniformly to a sum function $f$on $[a, b]$ then prove that f is also continuous on $[a, b]$.

माना $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित संतत फलनो $u_n(x)$, $\forall n \in N$ की श्रेणी है तथा $[a, b]$ पर

योग फलन f को एकसमानतः अभिसृत होती है तब सिद्ध कीजिए कि f भी $[a, b]$ पर संतत् है।

(b) Show that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p + n^q x^2}$, $\forall x \in R$ is uniformly convergent if $p + q > 2$.
प्रदर्शित कीजिए कि $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p + n^q x^2}$, $\forall x \in R$ एकसमानतः अभिसारी है यदि $p + q > 2$

8. (a) Test for the uniform convergence of the series $\sum_{n=0}^{\infty} x\, e^{-nx}$ and continuity of the sum function at $x = 0$.
श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} x\, e^{-nx}$ के एकसमान अभिसरण के लिए जांच कीजिए तथा योग फलन की $x = 0$ पर सांतत्यता की जांच कीजिए।

(b) If a series $\sum f_n(x)$ of continuous functions on [a, b] converges uniformly to sum function S(x) then sum function S(x) is also continuous on [a, b].

B.A./B.Sc. Third Semester Examination
(Faculty of Science)
MATHEMATICS
SECOND PAPER
Differential Equations

1. Solve (हल कीजिए) :

a) $(x^3 + xy^2 + a^2y)dx + (y^3 + yx^2 - a^2x)dy = 0$

b) $x^2p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$

2. Solve (हल कीजिए) :

a) $(x - a)p^2 + (x - y)p - y = 0$

b) $(x^3 + xy^4)dx + 2y^3dy = 0$

3. Solve (हल कीजिए):

a. $(D^4 + 2D^3 + 3D^2 + 2D + 1)\, y = 0$

b. $(\mathrm{D}^2 + a^2)^2 y = Sin\, ax$

4. Solve (हल कीजिए): $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = x\, log\, x$

5. Solve (हल कीजिए) :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (1 - \cot x)\frac{dy}{dx} - y \cot x = sin^2x$$

6. Solve by the method of variation of parameters

प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिये

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = cosec\, ax$$

7. Solve (हल कीजिए) :

(a) $\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = \frac{dy}{y(z^2-x^2)} = \frac{dz}{z(x^2-y^2)}$

(b) $r - 2\,s\, + t = \sin\,(2x + 3y)$

8. Find the complete integral of the following equation by Charpit's method

निम्नलिखित समीकरण से चार्पी विधि से पूर्ण समाकलन ज्ञात कीजिये।

$2(z + xp + yq) = yp^2$

B.A./ B.Sc./ B.Sc.Hons. Fifth Semester

MATHEMATICS

FIRST PAPER

Abstract Algebra-I

Unit I

1. If a and b are any two elements of a group $(G,*)$ then show that the equation $a*x=b$ and $y*a=b$ have unique solution in G.

यदि a और b किसी समूह $(G,*)$ के कोई दो अवयव हैं तो दर्शाइए कि समीकरण $a*x=b$ और $y*a=b$ के अद्वितीय हल है।

2.(a) Find $\sigma^{-1}\rho\sigma$, when

$\sigma^{-1}\rho\sigma$ ज्ञात कीजिए

$$\rho=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

And $\sigma=(1\ \ 3\ \ 4)\ (5\ \ 6)\ \ (2\ \ 7\ \ 8\ \ 9)$

Also express the permutations ρ as a product of disjoint cycles. Find whether ρ is even or odd permutation and give its order.

तथा क्रमचय को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में भी व्यक्त करें। ज्ञात कीजिए कि ρ सम है या विषम क्रमचय और कोटि भी बताइये

(b) If H and K are any two subgroups of a group G then prove that HK is a subgroup of G iff HK=KH.

यदि H और K समूह G के कोई दो उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि HK, G का एक उपसमूह है यदि और केवल यदि HK=KH.

Unit II

3.(a) State and prove Lagrange's theorem.

लैग्रेंज के प्रमेय का कथन दीजिये तथा सिद्ध कीजिये

(b) Prove that any two right (left) cosets of a subgroup of a group are either identical or disjoint.

सिद्ध करें कि एक समूह के उपसमूह के कोई भी दो दाएं (बाएं) सह समुच्चय या तो समान या असंबद्ध हैं।

4. (a) If H and K are two normal subgroups of G then prove that HK is also a normal subgroup of G.

यदि H और K, G के दो सामान्य उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि HK भी G का एक सामान्य उपसमूह है।

(b) Find the quotient group G/H when $G =< Z_8 , +_8 >$, $H =< \{0,\ 4\},\ +_8 >$
भागफल समूह G/H ज्ञात कीजिए जब $G =< Z_8 , +_8 >$, $H =< \{0,\ 4\},\ +_8 >$

Unit III

5(a)Prove that a homomorphism f of a group G into a group G' is a monomorphism iff kernel of $f = \{e\}$,where e is the identity in G.
सिद्ध कीजिए कि समूह G का समूह G' में समाकारिता f एक एकैक समकारिता है यदि और केवल यदि अष्टि f={e}, जहां e G में तत्समक है

(b) Show that the set J of Gaussian Integers $J = \{m + in | m, n \in z\}$ form a ring with respect to ordinary addition and multiplication of complex numbers.
दर्शा` कि गाऊसी पूर्णांकों का समुच्चय $J = \{m + in | m, n \in z\}$ सम्मिश्र संख्याओं का साधारण जोड़ और गुणा के संबंध में एक वलय बनाते हैं ।

6. Prove that every field is an integral domain but the converse is not necessarily true.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकिय प्रान्त है लेकिन विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं है।

Unit IV

7. (a) Prove that the necessary and sufficient conditions for a non – empty subset K of a field F to be a

subfield are
सिद्ध कीजिए कि एक क्षेत्र F के एक अरिक्त उपसमुच्चय K के उपक्षेत्र होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्तें हैं

(i) $a \in K,\ b \in K \implies a - b \in K$
(ii) $a \in K, 0 \neq b \in K \implies ab^{-1} \in K$

(b) Prove that the intersection of two subrings is also a subring.
सिद्ध कीजिए कि दो उपवलय का प्रतिच्छेदन भी एक उपवलय होता है।

8, Prove that $S = \left\{a + 2^{1/3} b + 4^{1/3} c | a, b, c \in Q\right\}$is a subfield of R.
सिद्ध कीजिए कि $S = \left\{a + 2^{1/3} b + 4^{1/3} c | a, b, c \in Q\right\}$,R का एक उपक्षेत्र है।

*****

SECOND PAPER

Complex Analysis-I
Assignment

Unit I

1.(a) Obtain the equation of a circle through three given points.
तीन बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that the area of the triangle whose vertices are the points z , z_2, z_3 on the Argand diagram is
सिद्ध कीजिये कि आर्गेण्ड चित्र में बिन्दुओं z , z_2, z_3 शीर्ष वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\sum\{(z_2 - z_3)|z_1|^2/(4iz_1)\}$$

2.(a) Prove that सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{z\to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$$

(b) Prove that the function $f(z) = |z|^2$ is continuous every where but its derivative exists only at the origin.
सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = |z|^2$ सर्वत्र संतत है किन्तु इसके अवकलन का अस्तित्व केवल मूल बिन्दु पर ही है।

Unit II

3.(a) Define Singular Point. Prove the necessary condition that a function $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ be analytic in a domain D is that in D, u and v satisfy the Cauchy – Riemann equation i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

विचित्र बिन्दु परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि फलन$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ के किसी प्रान्त D में विश्लेषिक होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध है कि उस प्रान्त में u तथा v कोशी–रीमान समीकरण संतुष्ट करते हैं अर्थात्

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(b) Show that the function $f(z) = \sqrt{(|xy|)}$ satisfies the Cauchy – Riemann equation at the origin but is not analytic at the point.
प्रदर्शित कीजिए की फलन $f(z) = \sqrt{(|xy|)}$ मूल बिन्दु पर कोशी–रीमान समीकरणों को सन्तुष्ट करता है परन्तु इस बिन्दु पर विश्लेषिक फलन नहीं है।

4.(a) Define Harmonic Function. Show that function $u = \cos x \cos hy$ is harmonic and find its harmonic conjugate.
प्रसंवादी फलन परिभाषित कीजिए सिद्ध कीजिए कि फलन $u = \cos x \cos hy$ प्रसंवादी फलन है तथा इसका प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ satisfy Laplace equation. Also determine the corresponding analytic function $f(z) = u + iv$.
सिद्ध कीजिए कि $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ लेप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करता है , निम्न का विश्लेषण फलन $f(z) = u + iv$ भी ज्ञात कीजिए।

Unit III

5. State and prove Cauchy – Goursat Theorem.
कोशी–गूर्सा प्रमेय का कथन लिखिए एंव इसे सिद्ध कीजिए।

6.(a) Evaluate $\int_o^{+i} z^2 dz$

मान ज्ञात कीजिय $\int_{o}^{+i} z \; dz$

(b) If $f(z)$ is analytic in a simply connected domain G , then the indefinite integral $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ is independent of the path joining z_0 with z in G.
सिद्ध कीजिए कि यदि एकशः सम्बद्ध प्रदेश G में $f(z)$ विश्लेषिक फलन हो, तो अनिश्चित समाकल $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$,G में बिन्दुओं z_0 तथा z को मिलाने वाले पथ से स्वतंत्र होता है।

Unit IV

7. State and prove Morera Theorem.
मोरेरा प्रमेय का कथन लिखिए एंव इसे सिद्ध कीजिए।

8.(a) Find the value of (मान ज्ञात कीजिए।)

$$\int_{|z|=} \frac{Sin^6 z}{\left[z - \left({}^{\pi}/_{6}\right)\right]^3} dz$$

(b) State and prove Liouville’s Theorem.
ल्यूवेल प्रमेय का कथन लिखिए एंव इसें सिद्ध कीजिए।

*****

THIRD PAPER
Dynamics

Unit I

1. (a) An insect crawls at a constant rate 'u' along the spoke of a cart wheel of radius 'a'. The cart is moving with velocity 'v'. Find the acceleration along and perpendicular to the spoke of the insect at time 't'.

एक कीड़ा किसी गाड़ी के a त्रिज्या वाले पहिये के आरे पर अचर चाल u से रेंगता है और गाड़ी v वेग से चलती है। t समय पर आरे की दिशा में तथा उसके लम्बवत दिशा में कीड़े के त्वरण ज्ञात कीजिए।

(b) A particle is describing a circle of radius 'a' in such a way that the tangential acceleration is always 'k' times the normal acceleration. If its speed at a certain point is 'u', prove that it will return to the same point after 'a' time $\frac{a}{ku}(1 - e^{-2\pi k})$

एक कण a त्रिज्या के वृत्त में ऐसे चलता है कि उसका स्पर्श रेखीय त्वरण उसके अभिलाम्बिक त्वरण का सदैव k गुणा रहता है। यदि किसी बिन्दु पर उसकी चाल u हो तो सिद्ध करो कि वह उसी बिन्दु पर $\frac{}{ku}(1 - e^{-2\pi k})$ समय पश्चात लौट आयेगा।

2. **(a)** The earth's attraction on a particle varies inversely as the square of its distance from the earth's center. A particle whose weight on the surface of the earth is 'w', falls to the surface of the earth from a height $5a$, above it. Show that the work done by the earth's attraction is $\frac{5}{6}aw$, where 'a' is the radius of the earth.

किसी कण पर पृथ्वी का गुरूत्वाकर्षण बल कण की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के व्युत्क्रम वर्गानुपाती है। एक कण जिसका पृथ्वी की सतह पर w भार है, सतह पर $5a$ ऊंचाई से गिरता है। सिद्ध कीजिए कि गुरूत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य $\frac{5}{6}aw$ है , जहाँ a पृथ्वी की त्रिज्या है।

(b) Prove that the mean K.E. of a particle of mass 'm' moving under a constant force in any interval of time is $\frac{1}{6}m\,({u_1}^2 + u_1u_2 + {u_2}^2)$ where u_1 and u_2 are initial and final velocities.

सिद्ध कीजिए कि किसी अचर बल के अधीन चलने वाले m संहति के एक कण की औसत गतिज ऊर्जा किसी समय के अन्तराल में $\frac{1}{6}m\,({u_1}^2 + u_1u_2 + {u_2}^2)$ होगी , यदि u_1तथा u_2प्रारंभिक और अन्तिम वेग हों।

UNIT-II

3. (a) A particle is performing S.H.M. of period T about a centre O and it passes through a point P (where OP = b) with a velocity v in the direction OP. Prove that the time that elapses before it returns to P is $\frac{T}{\pi}tan^{-1}\left(\frac{vT}{2\pi b}\right)$.

एक कण केन्द्र O के सापेक्ष T आवर्तकाल की सरल आर्वत गति करे और यह किसी बिन्दु P (जहाँ OP = b), OP की दिशा में v वेग से गुजरे , तो सिद्ध कीजिए कि वह P पर पुनः $\frac{T}{\pi}tan^{-1}\left(\frac{vT}{2\pi b}\right)$समय के पश्चात लौटेगा।

(b) If corresponding to two masses m_1 and m_2 attached to the end of a vertical elastic string, $T_1$and T_2 be the periods of small oscillations and a_1, a_2 the statical extensions corresponding to these masses, prove that $g({T_1}^2 - {T_2}^2) = 4\pi^2(a_1 - a_2)$**7**

यदि किसी ऊर्ध्वाधर प्रत्यास्थ डोरी के लगे हुए दो विभिन्न द्रव्यमान m_1, m_2 के संगत लघु दोलन के आवर्तकाल T_1

तथा T_2 हों और उनके संगत स्थैतिक विस्तार a_1तथाa_2 हों तो सिद्ध कीजिए कि :
$g(T_1{}^2 - T_2{}^2) = 4\pi^2(a_1 - a_2).$

4.

(a) A particle of mass 'm' is projected vertically upwards under gravity,the resistance of the air being mk times the velocity. Show that the greatest height attained by the particle is $\frac{V^2}{g}[\lambda - log(1+\lambda)]$, where V is the terminal velocity of the particle λV is its initial velocity.
mसंहति का एक कण गुरूत्वाकर्षण के अधीन ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर फैंका जाता है। यदि वायु का प्रतिरोध , वेग का mk गुणा हो तो सिद्ध कीजिए कि कण की अधिकतम ऊँचाई होगी $\frac{V^2}{g}[\lambda - log(1+\lambda)]$जहाँ V माध्यम में कण का अन्तिम वेग है तथा λV इसका प्रारम्भिक ऊर्ध्वाधर वेग है।

(b) A particle falls from rest under gravity in a medium whose resistance varies as the square of the velocity, if v be the velocity actually acquired by it, v_0 the velocity it would have acquired had there been no resisting medium, and V the terminal velocity, prove that :
एक कण गुरूत्वाकर्षण के अधीन विरामवस्था से एक ऐसे माध्यम में गिरता है जिसका प्रतिरोध वेग के वर्ग समानुपाती है। यदि v वह वेग है जो उसके द्वारा वास्तव में प्राप्त किया जाता है, v_0वह वेग है जो वह प्राप्त कर लेता यदि कोई प्रतिरोधी माध्यम न होता और V माध्यम में अन्तिम वेग है, तो सिद्ध करो कि :

$$\frac{v^2}{v_0{}^2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v_0{}^2}{V^2} + \frac{1}{2.3}\frac{v_0{}^4}{V^4} - \frac{1}{2.3.4}\frac{v_0{}^6}{V^6} + \cdots$$

UNIT-III

5. (a) A projectile aimed at a mark which is in a horizontal plane through the point of projection, falls a feet too short when the elevation is 'α' and 'b' feet too far when the elevation is β. Show that, if the velocity of projection be the same in cell cases, the proper elevation to hit the mark is:
एक प्रक्षेप्य , उसके प्रक्षेप बिन्दु से होकर जाने वाले क्षैतिज तल में स्थित किसी लक्ष्य की ओर फेंका जाने पर उससे a फुट पहले रह जाता है, जबकि उसका उन्नतांश α होता है और जब उसका उन्नतांश β होता है तो लक्ष्य से b फुट आगे निकल जाता है। सिद्ध करो कि यदि प्रक्षेप वेग सभी अवस्थाओं में एक ही रहे तो लक्ष्य के लिए सही उन्नतांश होगा :
$\frac{1}{2}sin^{-1}\left\{\frac{sin\,2\beta + b\,sin\,2\alpha}{+b}\right\}$

(b)Shots are fired simultaneously from the top and bottom of a vertical cliff with elevations α and β respectively strike an object simultaneously at the same point. Show that, if 'a' is the horizontal distance of the object from the cliff, the height of the cliff is $a(\tan\beta - \tan\alpha)$.
एक ऊर्ध्वाधर मीनार की चोटी व पाद से दो गोलियाँ क्रमशः α वβ कोण पर एक साथ इस प्रकार दागी जाती है कि वे एक साथ किसी वस्तु को एक ही बिन्दु पर टकराती है। यदि वस्तु की मीनार से क्षैतिज दूरी a हो , तो सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई $a(\tan\beta - \tan\alpha)$ होगी।

6 . (a)A heavy particle of weight W, attached to a fixed point by a light inextensible string, describes a circle in a vertical plane. The tension of the string has the values mW and nW respectively, when the particle is at the highest and the lowest point of its path.Show that $n = m + 6$
एक W भार वाला कण जो कि स्थिर बिन्दु से एक भारहीन अवितान्य डोरी से बंधा है और ऊर्ध्वाधर तल में एक वृत में घूम रहा है। जब कण अधिकतम तथा न्यूनतम ऊँचाई पर होता है , तो डोरी में खिंचाव क्रमशः mW तथा nW होता है, तो सिद्ध कीजिए कि $n = m + 6$.

(b)A particle slides down from rest, from the highest point of a smooth vertical circle. Discuss its motion.
एक कण किसी चिकने उर्ध्वाधर वृत के उच्चतम बिन्दु पर विरामावस्था से फिसलता है। इसकी गति की विवेचना कीजिए।

UNIT-IV

7. (a) Find the moment of inertia of a uniform rectangular lamina of sides 2a, 2b and mass M about a line through centre and perpendicular to its plane.

2a तथा 2b भुजाओं वाले तथा संहति M के किसी एक समान आयताकार पटल का उस रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए, जो पटल केन्द्र से गुजरे तथा तल के लम्बवत हो।

(b) Find the moment of inertia of a solid sphere of radius 'a' and mass 'M' about its diameter.
a त्रिज्या तथा M संहित के ठोस गोले का गोले के किसी व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

8 . Show that the moment of inertia of a semicircular lamina about a tangent parallel to the bounding diameter is $Ma^2\left(\frac{5}{4}-\frac{8}{3\pi}\right)$ where a is the radius and M is the mass of the lamina.
प्रदर्शित कीजिए कि अर्ध – वृतीय पटल का उसके सीमक व्यास के समान्तर सपर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण $Ma^2\left(\frac{5}{4}-\frac{8}{3\pi}\right)$ है , जहाँ पटल की संहित M तथा त्रिज्या a है।

*****